UNIVERSITE D'ABOMEY-CALAVI

ECOLE POLYTECHNIQUE D'ABOMEY CALAVI (EPAC-UAC)

CENTRE AUTONOME DE PERFECTIONNEMENT (CAP)

Dr. Daniel SABI TAKOU

COURS DE MATHEMATIQUES POUR INGENIEURS

---

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66 46 48 76

I-Objectif général

Cette UE permet à l'étudiant de connaître les bases mathématiques pour l'ingénieur en ingénierie industrielle.

II-Objectifs spécifiques

A la fin de cette UE, l'apprenant sera capable de:
- faire des raisonnements logique,
- faire des démonstrations mathématiques,
- faire des calculs vectoriels,
- calculer le déterminant des matrices,
- calculer l'inverse d'une matrice,
- résoudre des système d'équation linéaire en utilisant la méthose matriciele,
- calculer les valeurs et les vecteurs propres.

III-Pré-requis

Programme de mathématique de la classe de terminale C, D, E.

IV-Composantes (UE) et contenu (principaux thèmes)

Vecteurs, algèbre et géométrie vectorielle, produits scalaires, vectoriels et mixtes ; fonctions vectorielles à une variable et applications ; transformées linaires ; matrices, déterminants, inversion de matrices, systèmes d'équations linaires, valeurs propres vecteurs propres.

Modalités d'enseignement ou d'apprentissage:

Cours magistral appuyé par des travaux dirigés et des travaux personnels.

Bibliography

[1] Exercices et problèmes de mathématiques supérieures. P. DANKO, A. POPOV, T. KOGEVNIKOVA. Parties 1 et 2. Edition Mir Moscou.

[2] Aide mémoire de mathématiques supérieures. M. VYGODSKI. Edition Mir Moscou.

[3] Introduction à l'algèbre. A. KOSTRIKINE. Edition Mir Moscou.

[4] Problèmes mathématiques d'analyse des systèmes. N. MOISSEEV. Edition Mir Moscou.

[5] Mathématiques. Etapes des techniciens supérieurs. J. P. TRUC. Edition Nathan Paris.

[6] Cours de mathématiques supérieures. Y. BOUGROV, S. NIKOLSKI. Edition Mir Moscou.

[7] Eléments d'algèbre linéaire et de géométrie analytique. Y. BOUGROV, S. NIKOLSKI. Edition Mir Moscou.

[8] Cours élémentaire de mathématiques supérieures par V. KOUDRIAVTSEV et B. DEMIDOVITCH. Edition Mir Moscou

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Table des matières

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Première partie :

ALGEBRE POUR INGENIEURS

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Chapitre Premier

Introduction

La première année d'études supérieures pose les bases des mathématiques. Pourquoi se lancer dans une telle expédition ? Déjà parce que les mathématiques vous offriront un langage unique pour accéder à une multitude de domaines scientifiques. Mais aussi parce qu'il s'agit d'un domaine passionnant ! Nous vous proposons de partir à la découverte des maths, de leur logique et de leur beauté. Dans vos bagages, des objets que vous connaissez déjà : les entiers, les fonctions... Ces notions en apparence simples et intuitives seront abordées ici avec un souci de rigueur, en adoptant un langage précis et en présentant les preuves. Vous découvrirez ensuite de nouvelles théories (les espaces vectoriels, les équations différentielles,...). Ce tome est consacré à l'algèbre et se divise en deux parties. La première partie débute par la logique et les ensembles, qui sont des fondamentaux en mathématiques. Ensuite vous étudierez des ensembles particuliers : les nombres complexes, les entiers ainsi que les polynômes. Cette partie se termine par l'étude d'une première structure algébrique, avec la notion de groupe. La seconde partie est entièrement consacrée à l'algèbre linéaire. C'est un domaine totalement nouveau pour vous et très riche, qui recouvre la notion de matrice et d'espace vectoriel. Ces concepts, à la fois profonds et utiles, demandent du temps et du travail pour être bien compris. Les efforts que vous devrez fournir sont importants : tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaître par cœur les définitions, les théorèmes, les propositions... sans oublier de travailler les exemples et les démonstrations, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement. Enfin, vous devrez passer autant de temps à pratiquer les mathématiques : il est indispensable de résoudre activement par vous-même des exercices, sans regarder les solutions. Au bout du chemin, le plaisir de découvrir de nouveaux univers, de chercher à résoudre des problèmes... et d'y parvenir.

Chapitre Deux

Elément de logique

2.1 Règles de logique formelle

Définition 2.1 *une proposition est une expression mathématique à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai ou faux.*

Exemple 2.2 .

1. *Tout nombre premier est pair , cette proposition est fausse.*
2. $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel, cette proposition est vraie*
3. *2 est inférieure à 4, cette proposition est vraie*

Définition 2.3 *Toute proposition démontrée vraie est appelée théorème (par exemple le théorème de PYTHAGORE, Thalès$\cdots$)*

La négation $\ll (nonP) \gg$, $\ll \overline{P} \gg$.

Définition 2.4 *Soit P une proposition, la négation de P est une proposition désignant le contraire qu'on note (nonP), ou bien $\overline{P}$, on peut aussi trouver la notation $\rceil P$. Voici sa table de vérité.*

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Exemple 2.5 .

1. *Soit $E \neq \emptyset$, $P : (a \in E)$, alors $\overline{P}$: $(a \notin E)$.*
2. *P: la fonction f est positive, alors $\rceil P$: la fonction f n'est pas positive.*
3. *$P : x + 2 = 0$, alors $(nonP)$: $x + 2 \neq 0$.*

2.1.1 Les connecteurs logiques

Soit P, Q deux propositions

1. La conjonction $\ll$ *et* $\gg$, $\ll \wedge \gg$

   Définition 2.6 *la conjonction est le connecteur logique $\ll$ et $\gg$, $\ll \wedge \gg$, la proposition (P et Q) ou ($P \wedge Q$) est la conjonction des deux propositions P, Q.*
   -($P \wedge Q$) est vraie si P et Q le sont toutes les deux.
   -($P \wedge Q$) est fausse dans les autres cas. On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

   Exemple 2.7 .

   (a) 2 est un nombre pair et 3 est un nombre premier, cette proposition est vraie

   (b) $3 \leq 2$ *et* $4 \geq 2$, *cette proposition est fausse.*

2. La disjonction $\ll$ *ou* $\gg$, $\ll \vee \gg$

   Définition 2.8 *La disjonction est un connecteur logique $\ll$ ou $\gg$, $\ll \vee \gg$, on note la disjonction entre P, Q par (P ou Q), ($P \vee Q$). $P \vee Q$ est fausse si P et Q sont fausses toutes les deux, sinon ($P \vee Q$) est vraie.*

   On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

P	Q	$P \vee Q$
1	*1*	*1*
1	*0*	*1*
0	*1*	*1*
0	*0*	*0*

   Exemple 2.9 .

(a) *2 est un nombre pair ou 3 est un nombre premier. Vraie.*

(b) $3 \leq 2$ *ou* $2 \geq 4$. *Fausse.*

3. L'implication

Définition 2.10 *L'implication de deux propositions P, Q est notée : $P \Rightarrow Q$ on dit P implique Q ou bien si P alors Q. $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse, sinon $(P \Rightarrow Q)$ est vraie dans les autres cas.*

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple 2.11 .

(a) $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 3$. *Vrai.*

(b) *Il pleut, alors je prends mon parapluie. Vraie c'est une conséquence.*

(c) *Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto. Vraie c'est une conséquence.*

4. La réciproque de l'implication

Définition 2.12 *La réciproque d'une implication $(P \Rightarrow Q)$ est une implication $Q \Rightarrow P$.*

Exemple 2.13 .

(a) *La réciproque de :* $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$, *est:* $x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 9$.

(b) *La réciproque de : (Il pleut, alors je prends mon parapluie),* ***est*** *: (je prends mon parapluie, alors il pleut).*

(c) *La réciproque de : (Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto),* ***est****: (Omar a joué au loto $\Rightarrow$ Omar a gagné au loto).*

5. La contraposée de l'implication

Soit P, Q deux propositions, la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$, on a

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}).$$

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Remarque 2.14 *$(P \Rightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ ont la même table de vérité, i.e., la même valeur de vérité.*

Exemple 2.15 .

(a) La contraposée de :(Il pleut, alors je prends mon para- pluie), ***est*** *(je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas).*

(b) La contraposée de :(Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto), ***est****: (Omar n'a pas joué au loto $\Rightarrow$ Omar n'a pas gagné au loto).*

6. La négation d'une implication

Théorème 2.16 *Soit P, Q deux propositions on a* $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$.

Exemple 2.17 .

(a) La négation de : (il pleut, alors je prends mon parapluie), ***est****: (il pleut et je ne prends pas mon parapluie).*

(b) La négation de : (Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto), ***est****: (Omar a gagné au loto et Omar n'a pas joué au loto).*

(c) $(x \in [0,1] \Rightarrow x \geq 0)$ *sa négation:* $(x \in [0,1] \wedge x < 0)$.

Conclusion

(a) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \wedge \overline{Q})$.

(b) La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{p})$.

(c) La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

Remarque 2.18 $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

PREUVE: Il suffit de montrer que $(P \Rightarrow Q)$ a la même valeur de vérité que $(\overline{P} \vee Q)$, on le voit bien dans la table de vérité suivante:

P	Q	$\overline{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \vee Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

7. L'équivalence

Définition 2.19 *l'équivalence de deux propositions P, Q est notée $P \Longleftrightarrow Q$, on peut aussi écrire $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. On dit que $P \Longleftrightarrow Q$ si P et Q ont la même valeur de vérité, sinon $(P \Longleftrightarrow Q)$ est fausse.*

P	*Q*	$P \Longleftrightarrow Q$
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*0*
0	*0*	*1*

Remarque 2.20 *(a) $P \Leftrightarrow Q$ c'est à dire P n'est pas équivalente à Q lorsque $P \Rightarrow Q$ ou $Q \Rightarrow P$.*

(b) $P \Longleftrightarrow Q$ peut être lue P si et seulement si Q.

Exemple 2.21 .

(a) $x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2$.

(b) Omar a gagné au loto $\Leftrightarrow$ Omar a joué au loto.

Théorème 2.22 *Soit P, Q deux propositions on a:* $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

PREUVE

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$(P \Longleftrightarrow Q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

8. Propriétés des connecteurs logiques

   Quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q, R les propriétés suivantes sont toujours vraies.

   (a) $\overline{P} \vee P$.

   (b) $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$.

   (c) $P \wedge P \Longleftrightarrow P$.

   (d) $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$. Commutativité de $\wedge$.

   (e) $P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$. Commutativité de $\vee$.

   (f) $((P \wedge Q) \wedge R) \Longleftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$. Associativité de $\wedge$.

   (g) $((P \vee Q) \vee R) \Longleftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$. Associativité de $\wedge$.

   (h) $P \vee P \Longleftrightarrow P$.

   (i) $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R))$.

   (j) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$.

   (k) $P \wedge (P \vee Q) \Longleftrightarrow P$.

   (l) $P \vee (P \wedge Q) \Longleftrightarrow P$.

   (m) $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ Lois de Morgan

   (n) $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ Lois de Morgan

   (o) $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

   PREUVE (m) et (n)

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

2.1.2 Les quantificateurs

1. Quantificateur universel $\ll \forall \gg$

   La relation pour tous x tel que $P(x)$ est notée : $\forall x,\ P(x)$ se lit quel que soit $x, P(x)$.

2. Quantificateur existentiel $\ll \exists \gg$

   la relation il existe un x tel que $P(x)$ est notée : $\exists x,\ P(x)$.

Remarque 2.23 *Il existe un et un seul élément x de E c'est à dire un unique x, $P(x)$ est notée: $\exists! x \in E,\ P(x)$*

Exemple 2.24 . *Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :*

1. *$P(x)$: La fonction f est nulle pour tous $x \in \mathbb{R}$ devient*

   $P(x) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

2. *$P(x)$: la fonction f s'annule en x_0 devient $P(x) : \exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = 0$.*

Remarque 2.25 *Les relations $\forall x, \exists y, P(x, y)$ et $\exists y, \forall x,\ P(x, y)$ sont différentes, dans la première y dépend de x tandis que dans la seconde y ne dépend pas de x.*

Exemple 2.26 .

1. *Tous les étudiants de la section 1 ont un groupe sanguin. $\forall$ étudiant $\in$ section 1, $\exists$ un groupe sanguin, étudiant a un groupe sanguin.*

   Vraie *(cela veut dire que chaque étudiant a un groupe sanguin).*

2. *Il existe un groupe sanguin pour tous les étudiants de la section 1. $\exists$ un groupe sanguin O^-, $\forall$ l'étudiant de section 1, l'étudiant a O^-.* ***Fausse*** *(cela veut dire que tous les étudiants ont le même groupe sanguin ce qui est peut probable).*

3. *La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0)$ est vraie en effet $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y = -x \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = 0$.*

4. *$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq y$ c'est vraie car $\exists y = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.*

Règles de négations

Soit $P(x)$ une proposition,

1. La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est: $\exists x \in E, \overline{P}(x)$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

2. La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est: $\forall x \in E, \overline{P}(x)$

Remarque 2.27 .

1. *$\exists x \in E$, $\forall y \in E$, $P(x,y)$ veut dire que x est constante (fixé), il est indépendant de y qui varie dans E.*

2. *$\forall x \in E$, $\exists y \in, P(x,y)$ veut dire y dépend x , par une certaine relation f telle que $y = f(x)$.*

3. *On peut permuter entre deux quantificateurs de la même nature:*
   $\forall x, \forall y,\ P(x,y) \Longleftrightarrow \forall y, \forall x, P(x,y)$.
   $\exists x, \exists y, P(x,y) \Longleftrightarrow \exists y, \exists x, P(x,y)$.

Exemple 2.28 . *La négation de $\forall \epsilon > 0$, $\exists q \in \mathbb{Q}^+$ tel que: $0 < q < \epsilon$ est: $\exists \epsilon > 0$, $\forall q \in \mathbb{Q}^+$ tel que: $q \leq 0$ ou $q \geq \epsilon$.*

2.2 Méthodes de raisonnement

Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie on peut utiliser ce qui suit:

1. Méthode de raisonnement direct

   On suppose que P est vraie et on démontre que Q l'est aussi.

   Exemple 2.29 *Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$ si n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.*
   On suppose que n est pair, i.e., $\exists k \in \mathbb{Z}$, $n = 2k$ donc $n.n = 2(2k^2) \Rightarrow n^2 = 2k^{'}$
   on pose $k^{'} = 2k^2 \in \mathbb{Z}$ ainsi $\exists k^{'} \in \mathbb{Z}, n^2 = 2k^{'}$, n^2 est pair, d'où le résultat.

2. Méthodes du raisonnement par la contraposée

   Sachant que $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$, pour montrer que $P \Rightarrow Q$ on utilise la contraposée, c'est à dire il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ de manière directe, on suppose que $\overline{Q}$ est vraie et on montre que $\overline{P}$ est vraie.

   Exemple 2.30 *Montrons que n^2 est impair $\Rightarrow n$ est impair. Par contraposée il suffit de montrer que si n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair voir l'exemple précédent.*

3. Raisonnement par l'absurde

   Pour montrer que R est une proposition vraie on suppose que $\overline{R}$ est vrai et on tombe sur une contradiction (quelque chose d'absurde), quand R : $P \Rightarrow Q$ est une implication par l'absurde on suppose que R: $R \wedge \overline{Q}$ est vraie et on tombe sur une contradiction.

Exemple 2.31 .

(a) Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

(b) n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair, par l'absurde : on suppose que n est pair et que n^2 est impaire contradiction.

4. Contre exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner ce qu'on appelle un contre-exemple c'est à dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

Exemple 2.32 *(n est un nombre pair)$\Rightarrow (n^2+1 estpair)$, fausse car pour $n = 2, 4+1 = 5$ n'est pas pair, c'est un contre-exemple.*

5. Raisonnement par récurrence

Pour montrer que$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, $Pn(x)$ est vraie on suit les étapes suivantes:

(a) On montre que $P(n_0)$ est vraie, (valeur initiale).

(b) On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n.

(c) On montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$.

Alors P est vrai pour tous $n \geq n_0$.

Exemple 2.33 .

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(a) Pour $n = 1$, $P(1)$ est vraie $1 = \frac{1(2)}{2}$

(b) On suppose que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie

(c) On montre que $1+2+3+\cdots+n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie,
$1+2+3+\cdots+n+1 = 1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
ainsi P est vraie à l'ordre $n+1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie.

Exercice 2.34 . *Donner la négation des propositions suivantes:*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}, 2x+y > 3$.

2. $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \epsilon$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 0 \vee x \in]2, 4])$.

4. *Il existe* $M \in \mathbb{R}^+$, *pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *tel que:* $|U_n| \leq M$.

Exercice 2.35 . *Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions :*

1. *Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?*

2. *Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?*

3. *Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?*

4. *Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ?*

Exercice 2.36 . *Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$: $2x + y > 0$.

2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$: $2x + y > 0$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$: $2x + y > 0$.

4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$: $2x + y > 0$.

5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$: $y^2 > x$.

Exercice 2.37 . *Par l'absurde montrer que:*

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 *pair* $\Rightarrow$ n *est pair.*

Exercice 2.38 . *Par contraposée, montrer que*

1. *Si* $(n^2 - 1)$ *n'est pas divisible par* $8 \Rightarrow n$ *est pair.*

2. $(\forall \epsilon > 0, |x| \lneq \epsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 2.39 . *Montrer par récurrence que*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4^n + 6n - 1$ *est un multiple de 9.*

Chapitre Trois

Théorie des ensembles

3.1 Notion d'ensemble et propriétés

3.1.1 Ensemble.

Définition 3.1 *Un ensemble est une collection d'objets mathématiques (éléments) rassemblés d'après une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer qu'un objet appartient ou pas à un ensemble.*

Exemple 3.2 .

1. *E : l'ensemble des étudiants de l'université d'USTO.*
2. *On désigne par* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \cdots$.
3. *L'ensemble des nombre pairs se note :* $P = \{x \in \mathbb{N}/2divisex\}$.
4. *L'ensemble vide est noté:* $\emptyset$ *qui ne contient aucun élément.*

3.1.2 Inclusion.

On dit que l'ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B et on note $A \subset B$,

$$A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)).$$

La négation:

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow (\exists x, (x \in A \land x \notin B)).$$

Exemple 3.3 .

1. *On désigne* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombre réels on a:* $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
2. *On désigne* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des nombre entiers relatifs,* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des rationnels on a:* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3.1.3 Egalité de deux ensembles

Soient A, B deux ensembles sachant $A = B$, cela veut dire que :

$$A = B \Longleftrightarrow ((A \subset B) \text{ et } (B \subset A)).$$

3.1.4 Différence de deux ensembles

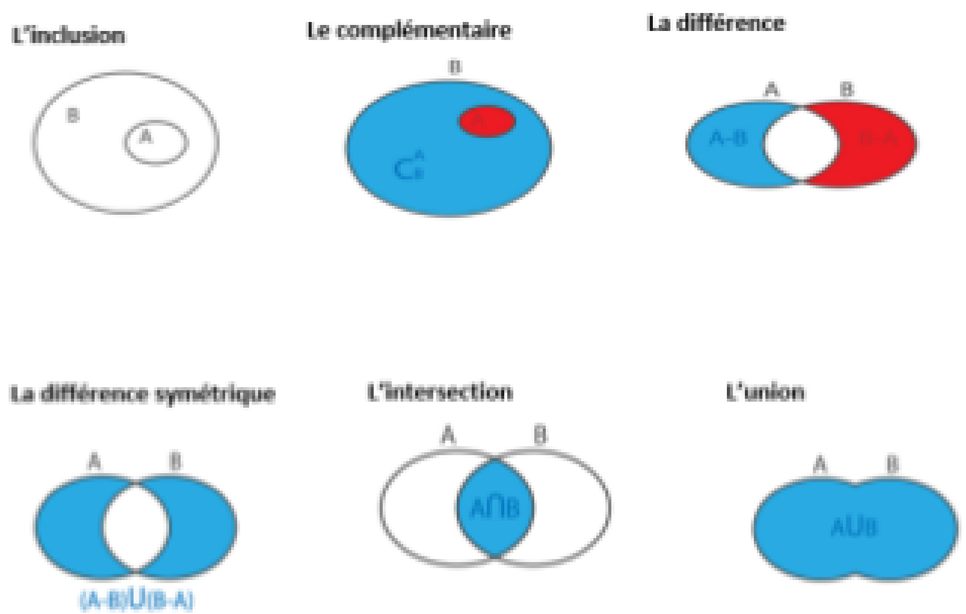
La différence de deux ensembles A, B est un l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B, noté $A - B$.

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Si $A \subset B$ alors $B - A$ est aussi appelé le complémentaire de A dans B, il est noté C_B^A, A^c.

$$C_B^A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

3.1.5 Opérations sur les ensembles



L'union

La réunion ou l'union de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou B, on écrit $A \cup B$.

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

. La négation :

$$x \notin A \cup B \Longleftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$$

.

Remarque 3.4 .

1. *Si A, B n'ont pas d'éléments en commun, on dit qu'ils sont disjoints, alors* $A \cap B = \emptyset$.

2. $B = C_B^A \Longleftrightarrow A \cup B = E$ *et* $A \cap B = \emptyset$.

3. $A - B = A \cap B^c$.

La différence symétrique

Soient E un ensemble non vide et A, $B \subset E$, la différence symétrique entre deux ensembles A, B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A - B$ ou $B - A$ noté $A \triangle B$.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

.

$$x \in A \triangle B \Longleftrightarrow \{x/x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}.$$

3.1.6 Propriétés des opérations sur les ensembles

1. La commutativité. Quels que soient A, B deux ensembles:
   $A \cap B = B \cap A$
   $A \cup B = B \cup A$.

2. L'associativité. Quels que soient A, B, C deux ensembles:
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3. la distributivité. Quels que soient A, B, C deux ensembles :
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

L'idempotence.

$A \cup A = A, A \cap A = A$.

Lois de Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

3.1.7 Produit Cartésien

Soient A, B deux ensembles , $a \in A$, $b \in B$ on note $A \times B = \{(a, b),\ a \in A,\ b \in B\}$ l'ensemble $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) pris dans cet ordre il est appelé ensemble produit cartésien des ensemble A et B.

Remarque 3.5 *Si A et B sont des ensembles finis et si on désigne par:*
CardA: le nombre des éléments de A.
CardB: le nombre des éléments de B. on aura:
$Card(A \times B) = CardA \times CardB$.

Exemple 3.6 .

1. *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

   (a) $A \subset E$, $B \subset E$.
   A n'est pas inclus dans B car $1 \in A \wedge 1 \notin B$.
   B n'est pas inclus dans A car $8 \in B \wedge 8 \notin A$.

   (b) $A \cap B = \{2, 4, 6\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

   (c) $A - B = \{1, 3, 5\}, B - A = \{8\}$.

   (d) $A \triangle B = \{1, 3, 5, 8\}$.

2. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$,
   $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$,
   $A \times B \neq B \times A$, *car* $(3, 2) \in B \times A$, *et* $(3, 2) \notin A \times B$.

3.2 Applications et relations d'équivalences

3.2.1 Application

Définition 3.7 *On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F une loi de correspondance (ou une relation de correspondance) permettant d'associer à tout* $x \in E$ *un unique* *élément $y \in F$ où E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivé. L'élément y associé à x est l'image de x par f , on note $x \longmapsto y/y = f(x)$.*

Exemple 3.8 .

$$f_1 : \quad \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto 4n + 2$$

3.2.2 Image directe et image réciproque

1. L'image directe.

   Soit $f : E \longmapsto F$ et $A \subset E$, on appelle image de A par f un sous ensemble de F , noté $f(A)$ tel que

   $f(A) = \{f(x) \in F/x \in A\}$,

2. L'image réciproque.

   Soit $f : E \longmapsto F$ et $B \subset F$, on appelle l'image réciproque de B par f , la partie de E notée $f^{-1}(B)$ telle que

   $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$,

   sachant que $f^{-1}(B) \subset E$, et que B, $f^{-}(B)$ sont des ensembles.

   Exemple 3.9 .

   (a) *Soit f l'application définie par:*

   $$f : \quad [0,3] \longmapsto [0,4]$$
   $$x \longmapsto f(x) = 2x + 1$$

   Trouver $f([0,1])$?

   $f([0,1]) = \{f(x)/x \in [0,1]\} = \{2x + 1/0 \le x \le 1\}$,

   on a :$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le 2x \le 2 \Rightarrow 1 \le 2x + 1 \le 3$, *alors* $f([0,1]) = [1,3] \subset [0,4]$.

   (b) *Soit f l'application définie par:*

   $$g : \quad [0,2] \longmapsto [0,4]$$
   $$x \longmapsto g(x) = (2x + 1)^2$$

Calculer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(]0,1[)$.

$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0,2]/f(x) \in \{0\}\} = \{x \in [0,2]/f(x) = 0\} = \{x \in [0,2]/(2x-1)^2 = 0\} = \{\frac{1}{2}\}$.

$f^{-1}(]0,1[) = \{x \in [0,2]/f(x) \in]0,1[\} = \{x \in [0,2]/0 < (2x-1) < 1\}$,

On a : $(2x-1)2 > 0$ *est verifiée* $\forall x \in \mathbb{R}'\{\frac{1}{2}\}$, $x \in [0,2]$. *D'autre part* $(2x-1)2 < 1 \Rightarrow |2x-1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$, *et donc* $x \in]0,1[$, *en regroupant les deux inégalités, on obtient*

$f^{-1}(]0,1[) = ([0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},2])\cap]0,1[=]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[$.

3. La surjection.

Définition 3.10 *L'image $f(E)$ de E par f est une partie de F. Si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E, on dit que f est une application surjective de E dans F on a: $f(E) = F$.*

f est surjective $\iff (\forall y \in F), (\exists x \in E)/f(x) = y$.

Exemple 3.11 .

(a)

$$\begin{aligned} f_1 : \quad \mathbb{N} &\longmapsto \mathbb{N} \\ n &\longmapsto 4n+1 \end{aligned}$$

f_1 n'est pas surjective, en effet si on suppose qu'elle est surjective c'est à dire $\forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}/4n+1 = y \Rightarrow n = \frac{y-1}{4}$ *, or* $n = \frac{y-1}{4} \notin \mathbb{N}$ *contradiction f_1 n'est pas surjective.*

(b)

$$\begin{aligned} f_2 : \quad \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 5x+3 \end{aligned}$$

f_2 est surjective car: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}/5x+3 = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$.

4. L'injection.

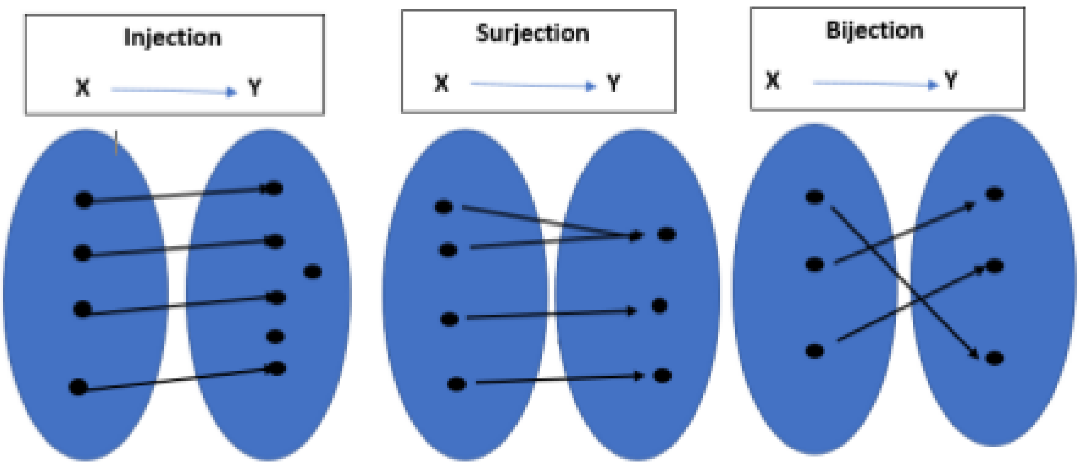
Définition 3.12 *Quand on a deux éléments dictincts de E correspondent pas f à deux image différentes de F , f est dite application injective, on a alors:*
(f est injective) $\Longleftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$,
ou
(f est injective) $\Longleftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Exemple 3.13 .

(a)

$$\begin{aligned} f_1 : \quad & \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \\ & n \longmapsto 4n+1 \end{aligned}$$

f_1 *est injective car* :$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4n_1 + 2 = 4n_2 + 2 \Rightarrow 4n_1 = 4n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$.



(b)

$$\begin{aligned} f_2 : \quad & \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ & x \longmapsto 5x+3 \end{aligned}$$

f_2 *est injective car* :$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

5. La bijection
f est une application bijective si elle injective et surjective, c'est à dire tout élément de F est l'image d'un unique élément de E, f est bijective si et seulement si : $(\forall y \in F), (\exists! x \in E), (f(x) = y)$. ($\exists!$ signifie unique)

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Exemple 3.14 .

(a) *f_1 n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.*

(b) *f_2 est bijective.*

Remarque 3.15 *Lorsque une application f est bijective cela veut dire que l'application inverse f^{-1} existe. f^{-1} est aussi bijective de F sur E et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

6. La composition d'application

Soient E, F, G des ensembles et deux appli- cations f, g telles que

$$\begin{array}{cc} f : E \longmapsto F & g : F \longmapsto G \\ x \longmapsto f(x) = y & y \longmapsto g(y) = z \end{array}$$

On définit l'application

$$\begin{array}{c} g \circ f : E \longmapsto G \\ x \longmapsto g \circ f(x) = z \end{array}$$

Propriété 3.16 (a) *Si f et g sont injectives $\Rightarrow g \circ f$ est injective.*

(b) *Si f et g sont surjectives $\Rightarrow g \circ f$ est surjective.*

Remarque 3.17 *Il s'ensuit que la composée de deux bijection et une bijection. En particulier, la composition de $f : E \longmapsto F$ et sa réciproque $f^{-1} : F \longmapsto E$ est l'application indentitée Id_E, $f^{-1} \circ f = Id_E$, $f \circ f^{-1}) = Id_F$.*

7. Propriétés des applications.

Soit $f : E \longmapsto F$ on a:

(a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Propriété 3.18 *Soit $f : E \longmapsto F$, $g : F \longmapsto G$ on a:*

(a) $g \circ f$ *est injective, alors* f *est injective.*

(b) $g \circ f$ *est surjective, alors* g *est surjective.*

(c) $g \circ f$ *est bijective, alors* f *est injective et* g *est surjective.*

Exercice 3.19 . *On considère les ensembles suivants:*
$A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{\{1, 2\}, 5\}$, $C = \{\{1, 2, 5\}\}$, $D = \{\emptyset, 1, 2, 5\}$, $E = \{5, 1, 2\}$, $F = \{\{1, 2\}, \{5\}\}$, $G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}$, $H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$.

1. *Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces en- sembles ?*

2. *Déterminer* $A \cap B, G \cup H, E - G$.

3. *Quel est le complémentaire de* A *dans* D.

Exercice 3.20 . *Etant donné A, B et C trois parties d'un ensemble E,*

1. *Montrer que:*

   (a) $(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c$.

   (b) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

   (c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

2. *Simplifier:* $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \overline{A})}$ *et* $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \overline{A})}$

Exercice 3.21 . *Soient* $E = [0, 1]$, $F = [-1, 1]$, *et* $G = [0, 2]$ *trois intervalles de* $\mathbb{R}$.
Considérons l'application f de E dans G définie par:
$f(x) = 2 - x$, *et l'application g de F dans G définie par:* $g(x) = x^2 + 1$

1. *Déterminer* $f(\{1/2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $g([-1, 1])$, $g^{-1}[0, 2])$.

2. *L'application f est-elle bijective ? justifier.*

3. *L'application g est-elle bijective ? justifier.*

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Matrice: Définitions-Types et Opérations

4.1 Définitions

On appelle matrice un tableau A dont les éléments appartiennent à un ensemble donné $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général. Toute matrice est formée d'un certain nombre n de lignes et d'un certain nombre p de colonnes.

Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle matrice à n lignes et à p colonnes d'éléments réels ou complexes tout tableau de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Dans cette écriture, chacun des éléments de A est repéré par un indice double situant, respectivement, la ligne et la colonne où se trouve cet élément. Ainsi a_{21} est l'élément de A situé sur la 2^{e} ligne et la 1^{ere} colonne.

La matrice A est aussi notée:

$$A = (a_{ij}), \text{avec } 1 \leq i \leq n, \;\; 1 \leq j \leq p \tag{4.1}$$

La notation a_{ij} désigne l'élément se trouvant à l'intersection de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne.

a_{ij} s'appelle aussi terme général de la matrice A et les a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice A.

La matrice à n lignes et à p colonnes est une matrice dite matrice de format (n, p) ou tout simplement matrice (n, p) ou matrice de tailleb $n \times p$.

L'ensemble des matrices (n, p) d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Exemple 4.1 *Soit la matrice suivante* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 11 & 33 & 44 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

A est à 3 lignes et à 4 colonnes.

A est une matrice de format $(2, 5)$ ou une matrice de taille 2×5.

Une matrice n'a pas de valeur numérique. Elle est simplement utilisée pour simplifier l'écriture d'une certaine quantité d'informations et permet une manipulation facile du point de vue mathématique.

4.2 Types de matrices

- Une matrice ne contenant qu'une seule ligne $n = 1$ est appelée matrice ligne ou vecteur ligne.

  Exemple 4.2 $A = (5 \ \ 4 \ \ 6 \ \ -1 \ \ 6)$

- Une matrice ne contenant qu'une seule colonne $p = 1$ est appelée matrice colonne ou vecteur colonne.

  Exemple 4.3 $A = \begin{pmatrix} -23 \\ 21 \\ 25 \end{pmatrix}$

- Une matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle.

- Une matrice ayant même nombre de lignes que de colonnes $(n = p)$ est appelée **matrice carrée d'ordre** n. C'est une matrice de format (n, n) ou $(n \times n)$ ou simplement matrice carrée d'ordre n. Les éléments a_{ii} de cette matrice sont appelés éléments diagonaux.

  Exemple 4.4 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 61 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ *ou* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 61 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n d'éléments de $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Nous donnons à présent les définitions de certaines matrices carrées particulières.

- **Matrice identité**: On appelle matrice identité d'ordre n et on note I la matrice carrée, diagonale, de taille n, dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

  Exemple 4.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *On peut la noter* $A = Diag(2, 9, 5)$.

- **Matrice identité**: On appelle matrice identité d'ordre n et on note I la matrice carrée, diagonale, de taille n, dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

  Exemple 4.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Matrice scalaire : On appelle matrice scalaire d'ordre n toute matrice carrée αI_n où est réel ou complexe et de la forme: $\begin{bmatrix} \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$

- **Matrice triangulaire:** Une matrice carrée dont tous les éléments au-dessous de la diagonale principale sont nuls est appelée **matrice triangulaire supérieure**.

  Exemple 4.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Une matrice carrée dont tous les éléments au-dessus de la diagonale principale sont nuls est appelée **matrice triangulaire inférieure**.

  Exemple 4.8 $A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

  Une matrice carrée est dite matrice triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure. De cette définition, on retient que la matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

4.3 Transposée d'une matrice

On appelle transposée d'une matrice A de taille $n \times p$ la matrice notée ${}^tA$ (on note aussi A' ou A^t ou $\bar{A}$) de taille $p \times n$ dont les éléments de la i^{eme} colone correspondent à ceux de la j^{eme} ligne sont ceux de la j^{eme} colone de A. Autrement dit, la transposée d'une matrice A est la matrice ${}^tA$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple 4.9 *On considère la matrice suivante :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

La transposée de cette matrice est: ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Théorème 4.10 *Si A et B sont deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on a:*
${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
${}^t(\lambda A) = \lambda.{}^tA$
${}^t({}^tA) = A$
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$*, on a:* ${}^t(A.B) = {}^tA.{}^tB$.

4.4 Matrice symétrique et matrice antisymétrique

- Une matrice carrée A est dite symétrique si et seulement si ${}^tA = A$. C'est une matrice dont la disposition des éléments est symétrique par rapport à la diagonale principale.
- Une matrice A est dite antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

Exemple 4.11 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

${}^tA = -A$, donc A est antisymétrique.
On remarque que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

4.5 Opérations sur les matrices

4.5.1 Egalité de deux matrices

Deux matrices de même format (n, p) sont dites égales si et seulement si leurs éléments correspondants sont égaux.

4.5.2 Addition de deux matrices

L'addition de deux matrices de même taille s'effectue **élément par élément**. L'addition de deux matrices n'est possible que si ces matrices ont le même format (même nombre de lignes et de colonnes).

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même format (n, p), oon appelle somme des matrices A et B notée $C = A + B$ la matrice de formal (n, p) de terme général $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Donc

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}). \tag{4.2}$$

Exemple 4.12 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -12 & \sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1,2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3,2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -11 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

4.6 Produit matriciel

4.6.1 Produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne

On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

On a

$$A.B = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n = scalaire \tag{4.4}$$

4.6.2 Produit d'une matrice (n, p) par une matrice colonne

Il est possible d'effectuer le produit d'une matrice A par un vecteur colonne $\vec{u}$ si le nombre de colonnes de A est égal à la dimension de $\vec{u}$. Ainsi, si A est de format (n, p), son produit par $\vec{u}$ n'est possible que si $\vec{u}$ est de dimension p. Le résultat est alors un vecteur $\vec{v} = A \cdot \vec{u}$ de dimension n.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \text{ et } X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_f \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

On définit le produit AX par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_f \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{nj} x_j \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Exemple 4.13 *Soient A, B, C, D et E les matrices suivantes:* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$, $C \times E$ *et* $C + D$.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

4.6.3 Produit d'une matrice A de type (n,p) par une matrice B de type (p,q)

Le produit de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Le résultat est alors une matrice C ayant autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

Ainsi si A est de format (n,p) et B de format (p,q) (p est alors le nombre commun de colonnes de A et de lignes de B) alors $C = A \times B$ est de taille (n,q). Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors le produit $C = AB$ est une matrice dont le terme de la i^{eme} ligne, j^{eme} colonne est:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}. \tag{4.7}$$

On peut considérer que B est la juxtaposition de ses q matrices colonnes et effectuer le produit de A par chacune de ses colonnes. La juxtaposition des q colonnes ainsi obtenues donne une matrice de format (n,q)

Exemple 4.14 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 14 \\ 28 & 28 & 22 \\ 26 & 25 & 21 \end{pmatrix}$

Si A est une matrice de format $(2,2)$ et B de format $(2,3)$ alors le produit AB existe mais BA n'existe pas. De façon générale si deux matrices A et B sont données et les produits AB et BA existent, on n'a pas souvent $AB = BA$.

La multiplication matricielle n'est pas commutative.

Propriété 4.15 *Sous réserve de compatibilité de formats, on a:*

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- *Si I_n et I_p sont les matrices unités d'ordre n et p et A une matrice de format (n,p), on a:*

$$I_n A = A \;\; et \;\; A I_p = a. \tag{4.8}$$

- *Soient A et B deux éléments de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *qui commutent, c'est-à-dire tels que* $AB = BA$. *Alors, pour tout entier* $p \geq 0$, *on a la formule*

$$(A+B)^P = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k \tag{4.9}$$

où $\binom{p}{k}$ *désigne le coefficient du binôme.*

Exemple 4.16 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* $AB = 0$ *et* $BA = B$.
Cet exemple montre également que :

-si $AB = 0$ *on a pas nécéssairement* $A = 0$ *ou* $B = 0$, *donc si* $AB = AC$ *on a pas toujours* $B = C$.

-si $A = (a)$ *est une matrice* $(1,1)$, L *une matrice et* C *une matrice colone, on a:* $CA = aC$ *et* $AL = aL$.

4.7 Trace d'une matrice

On appelle trace d'une matrice carrée A le scalaire noté $tr(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A. Ainsi pour une matrice $A = (a_{ij}$ on a par définition :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}. \tag{4.10}$$

Propriété 4.17 .

- $tr(A+B) = trA + trB$,
- $tr(\alpha A) = \alpha trA$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
- $tr(A^T) = trA$,
- $tr(AB) = tr(BA)$.

Exercice 4.18 *On considère les matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $A^2 = 2I - A$. *En déduire que A est inversible et calculer* A^{-1}.

2. *Calculer* $B^3 - B$. *En déduire que* B *est inversible et calculer* B^{-1}.

Exercice 4.19 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^p *et* B^p *pour* $p \geq 0$. *Montrer que* $AB = BA$. *Calculer* $(A+B)^p$.

Chapitre Cinq

Déterminant et inverse d'une matrice carrée

5.1 Déterminants d'une matrice carrée

5.1.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Le déterminant de la matrice A est notée dét(A)=$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

On calcule le déterminant en effectuant le produit des éléments situés sur la diagonale principale auquel on retranche le produit des éléments de la diagonale secondaire.

Le déterminant $ad - bc$ représente l'aire algébrique d'un parallélogramme.

5.1.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Considérons la matrice carrée d'ordre 3 donnée par

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Le déterminant de A est noté $det(A)$ et vaut:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

5.1.3 Déterminant d'ordre n

Nous commenÃ§ons d'abord par définir les notions de mineurs, de cofacteurs et de comatrice.

Mineur d'un élément

Si dans un déterminant D d'ordre n on supprime la ligne et la colonne qui

contiennent un élément donné a_{ij}, on obtient un déterminant d'ordre $n-1$ appelé **le mineur de** a_{ij}

Exemple 5.1 . *Soit le déterminant :*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Dans D, le mineur de l'élément 4 est le déterminant la ligne et la colonne de 4 et on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 74 = 6 = -16.$$

Comatrice et matrice adjointe d'une matrice carrée

En désignant par Δ_{ij} le mineur de l'élément a_{ij}, on appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le nombre c_{ij} défini par:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}. \quad (5.3)$$

On appelle **comatrice ou matrice des cofacteurs** d'une matrice A et on note com(A) la matrice carrée de même taille que A dont les éléments sont les cofacteurs de A.

On appelle **matrice adjointe de A et notée** $adj(A)$ la transpoé de la comatrice de A. On a donc:

$$adj(A) = {}^tCom(A). \quad (5.4)$$

Exemple 5.2 *Soit*

$$M = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Déterminer la comatrice, la matrice adjointe, et le déterminant de M.

Remarque 5.3 *1-Le déterminant d'une matrice triangulaire A est le produit des éléments de sa diagonale principale, c'est-à-dire :*

$$detA_{triangulaire} = \prod_{i=1}^{n} a_{ij}$$

2-Une matrice diagonale ou triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

Propriété 5.4 .

- *La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une ligne (respectivement une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement des autres colonnes).*
- *Lorsqu'on multiplie une ligne (ou une colonne) d'une matrice A par un coefficient λ, alors la valeur de son déterminant est également multipliée par λ.*
- *Lorsqu'on multiplie toute la matrice M par λ alors la matrice λM de dimention n (d'ordre n) a pour déterminant*
$$det(\lambda M) = \lambda^n det(M).$$
- *La valeur du déterminant est multipliée par -1 si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes).*
- $det(^tM) = det(M)$
- $det(AB) = det(A).det(B)$.

5.2 Inverse d'une matrice carrée

5.2.1 Définitions et propriétés

Une matrice carrée M d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice carrée N de même taille, telle que $M.N = I_n$. Dans ce cas N est dite matrice inverse de M. Une matrice non inversible est dite singulière.

Si M est inversible, son inverse est unique et est notée M^{-1}. La matrice M^{-1} est également inversible et son inverse est la matrice M.

Théorème 5.5 *Si A et B sont deux matrice inversibles de même taille n alors le produit A.B est inversible et son inverse est la matrice $B^{-1}.A^{-1}$.*

5.2.2 Condition d'inversibilité d'une matrice

Une matrice carrée M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas, son inverse est égale à la transposée de la comatrice de M divisée par le déterminant de M

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)}.^{t}Com(M) \tag{5.5}$$

Propriété 5.6 *Une famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si: $det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n) \neq 0$.*

Théorème 5.7 *Si A et B deux matrices carrées inversibles, alors:*

- A^{-1} *est inversible et* $(A^{-1})^{-1} = A$
- ${}^{t}A$ *est inversible et* $({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$
- AB *est inversible et* $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Exercice 5.8 *Déterminer, si elles existent, les déterminants, les comatrices et les inverses des matrices:*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad M_3 \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

Chapitre Six

Système linéaires et matrices

6.1 Définition de systèmes linéaires

On appelle système de n équations linéaires à p inconnues le n-uplet d'équations:

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \tag{6.1}$$

où les coefficients a_{ij} et $b_i(1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p)$ sont des nombres réels ou complexes et où les inconnues sont $x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_p$.

La i^e équation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i$ est noté L_i et appelée i^e ligne de (S). On appelle système homogène un système dont tous les seconds membres sont nuls $(\forall i \in [1, n], b_i = 0)$.

Un système n'ayant aucune solution est dit impossible et un système ayant plusieurs solutions est dit indéterminé.

Nous pouvons regrouper d'une part les inconnues en un vecteur X et les éléments des seconds membres en un vecteur B. Ces deux vecteurs sont de dimension n. D'autre part, les coefficients a_{ij} forment la matrice carrée de taille n du système.

Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Le système (S) est équivalent à :

$$AX = B$$

Résoudre (S) c'est trouver l'ensemble des matrices colonnes X vérifiant $AX = B$.
A est appelée matrice du système (S).

6.2 Résolution d'un système linéaire de n équations

Soit (S) un système linéaire de n équations et autant d'inconnues. Soit A sa matrice, X le vecteur inconnu et B le vecteur second membre.

- Si A est inversible, alors (S) a une solution unique qui peut s'écrire sous la forme:

$$X = A^{-1}.B$$

- Si A n'est pas inversible, alors nous avons l'une des deux situations suivantes :
  -(S) admet une infinité de solutions
  -(S) n'admet aucune solution.

Théorème 6.1 .

1. *Le déterminant a les propriétés suivantes :*
   - Le déterminant reste inchangé lorsque l'on ajoute à une colonne le multiple d'une autre colonne.
   - Lorsque l'on échange la place de deux colonnes le déterminant est multiplié par -1.

2. *Le déterminant d'une matrice est nulle si et seulement si ses colonnes ne forment pas une base de* $\mathbb{R}^n$.

3. *Le déterminant du produit de deux matrices carrées est égal au produit des déterminants des deux matrices.*

$$det(AB) = det(A).det(B).$$

Exercice 6.2 *Résolvons les systèmes suivants :*

$$(S_1)\begin{cases} \quad x_1 \qquad\qquad\quad 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases} \quad , \quad (S_2)\begin{cases} ty + z = 1 \\ 2x + ty = 2 \\ -y + tz = 3 \end{cases} \tag{6.3}$$

Matrices et applications linéaires

7.1 Matrice d'une application linéaire

7.1.1 Bases canoniques

On appelle base de R une famille $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ de n vecteurs telle que tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ s'exprime de manière unique dans cette base sous la forme: $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$ où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base B et l'on note:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$

L'indice B pourra être supprimé de la colonne des coordonnées si la base est bien définie. Ce sera en particulier le cas s'il s'agit de la base naturelle de R dite aussi base canonique.

La base canonique de $\mathbb{R}$ est formée par les vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.

D'une manière générale, on appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$, la famille $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ où $\vec{i}_k$ est le n-uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf la k-ième:
$i_1 = (1, 0, ..., 0)$;$i_2 = (0, 1, ..., 0)$; $\cdots$; $i_n = (0, 0, ..., 1)$.

7.1.2 Détermination de la matrice d'une application linéaire

Considérons deux bases $B = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$ et $B = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Alors un vecteur de $\mathbb{R}^n$ admettant les coordonnées:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}_B \tag{7.1}$$

s'écrit:

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_p \vec{e}_p \tag{7.2}$$

Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, alors on a:

$$\begin{aligned}
f(\vec{u}) &= f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_p \vec{e}_p) \\
f(\vec{u}) &= f(\lambda_1 \vec{e}_1) + f(\lambda_2 \vec{e}_2) + \cdots + f(\lambda_p \vec{e}_p) (\text{première propriété de linéarité}) \\
f(\vec{u}) &= \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + \lambda_p f(\vec{e}_p) (\text{seconde propriété de linéarité}) \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

La valeur de $f(\vec{u})$ est donc connue dès lors que sont connues les coordonnées de $\vec{u}$ ainsi que les images des vecteurs de la base B. Les images d'une application linéaire peuvent donc toutes être calculées une fois que l'on connaît les images des vecteurs de base.

Supposons donc que les images de $e_1, e_2, \cdots, e_p$ soient connues. Ces images étant dans $\mathbb{R}$, elles se décomposent dans la base B'. Notons les n coordonnées de $f(\vec{e}_1)$ dans B' sous la forme:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_{B'} \tag{7.4}$$

le second indice (ici égal à 1) permet de préciser qu'il s'agit de l'image du premier vecteur de base $\vec{e}_1$, le premier indice indique le vecteur de la B' correspondant à la coordonnée considérée. Ainsi a_{21} est la coordonnée de $f(\vec{e}_1)$ sur le vecteur $\vec{d}_2$.
De même, on pose :

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}_{B'} , \cdots, f(\vec{e}_p) = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}_{B'} \tag{7.5}$$

Les $n \times p$ coordonnées précédentes (n coordonnées pour chacun des p vecteurs de la base B) déterminent complètement l'application linéaire f. Nous regroupons ces réels en formant une matrice de taille $n \times p$ où l'on inscrit, colonne par colonne, les coordonnées de $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_p)$ dans la base B'

$$M = \begin{array}{c} f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots\cdots\cdots\cdots, f(\vec{e}_p) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \tag{7.6}$$

pour obtenir la matrice représentative de l'application linéaire f dans les bases (B, B') La taille de cette matric M est égale à la dimension de l'espace d'arrivée multipliée par celle de l'espace de départ.

Reprenant la relation : $f(\vec{u}) = f(\lambda_1\vec{e}_1) + f(\lambda_2\vec{e}_2) + \cdots + f(\lambda_p\vec{e}_p)$ on obtient alors $f(\vec{u}) = M.\vec{u}$.

La matrice d'une application linéaire f peut être notée **mat(**f**)**.

7.1.3 Propriétés

7.1.4 Noyau et image d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$. On appelle:

- noyau de f et on note $Ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f est le vecteur nul.

$$Ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^n / f(\vec{u}) = \vec{O}\} \tag{7.7}$$

$$Ker(f) = f(\mathbb{R}^p) \tag{7.8}$$

-Image de f l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ayant un antécédent dans R par f. Elle est notée $Im(f)$ et:

$$Im(f) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n / \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^p, v = f(u)\} \tag{7.9}$$

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^p) \tag{7.10}$$

Exemple 7.1 *Si $f(x, y) = x + 2y$ alors $ker(f)$ est la droite d'équation $x + 2y = 0$ et $Imf = \mathbb{R}$.*

- $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel $\mathbb{R}$
- $Im(f)$ est sous espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

- f est injective $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$.

- f est surjestive $\Longleftrightarrow Im(f) = \mathbb{R}^n$.

- Soit f une application linéaire de E dans F. Si $E^{'}$ est une sous-espace vectoriel de E alors $f(E^{'})$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple 7.2 *On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques $(B, B^{'})$ de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ est:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

<u>Résolution</u>

Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ un élément du noyau de f. On a alors: $f(\vec{u}) = M.\vec{u}$ soit
$\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ Ces deux équations sont équivalentes (la première est le double de la seconde) et l'ensemble des vecteurs du noyau vérifie donc $2x + 3y + 2z = 0$ (qui est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$

<u>Image de f</u>

Soit $\vec{v} = (X, Y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Pour que $\vec{v} \in Im(f)$ il doit avoir un antécédent $\vec{u} = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$ et on doit avoir donc: $\begin{cases} X = 2x + 6y - 4z \\ Y = x + 3y - 2z \end{cases}$

O n obtient $X - 2Y = 0$.

L'image de f est donc l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $X - 2Y = 0$ qui est l'équation d'une droite vectorielle dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Théorème 7.3 *1. Si f est une application linéaire alors $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des SEV.*

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

2. Soit f: $E \longrightarrow F$ une application linéaire, on a la relation suivante :

$$dim(E) = dim(ker(f)) + dim(Im(f)) \tag{7.11}$$

7.2 Rangs

7.2.1 Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f une application E dans F. On appelle rang de f la dimension de $Im(f)$. On note

$$rg(f) = dimIm(f).$$

Théorème 7.4 *On a:*

1. $rg(f) = dimE - dimKer(f)$
2. $rg(f) \leq dimE$
3. $rg(f) \leq dimF$
4. *f est surjective*$\Leftrightarrow rg(f) = dimF$
5. *f est injective* $\Leftrightarrow rg(f) = dimE$
6. *Si* $dimE = dimF = n$ *alors f est bijective* $\Leftrightarrow rg(f) = n$.

7.2.2 Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et f l(application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$ canoniquement associée à A. On appelle rang de la matrice A le rang de f. O note $rg(A) = rg(f)$.
On appelle rang d'une matrice la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes.
Soit f une application linéaire de matrice M relativement à deux bases, alors le rang de M est égal à la dimension de l'image de f.

Théorème 7.5 1. *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $rg(f) \leq n$ *et* $rg(f) \leq p$

2. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *(la matrice carrée d'ordre n) A inversible* $\Leftrightarrow rg(f) = n$
3. *On a:* $rg({}^tA) = rg(A)$.

On donne une matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

On appelle rang de la matrice A l'ordre le plus élevé d'un de ses mineurs différents de 0.

Si tous les éléments de la matrice sont nuls, alors $rg(f) = 0$.

Exercice 7.6 *On considère l'application suivante*

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \tag{7.13}$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + y + 3z, 3x - 2y - 7z). \tag{7.14}$$

1. *Montrer que l'application f est linéaire.*

2. *L'application linéaire f est-elle surjective ?*

3. *Ecrire la matrice $Mat_{\mathbf{B}_4,\mathbf{B}_3}(f)$ de l'application linéaire f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.*

4. *Décrire l'image de l'application f en utilisant la matrice $Mat_{\mathbf{B}_4,\mathbf{B}_3}(f)$.*

5. *En déduire la dimension du noyau de f.*

6. *Décrire le noyau de l'application f en utilisant la matrice $Mat_{\mathbf{B}_4,\mathbf{B}_3}(f)$.*

Exercice 7.7 *Soit $f: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par*

$$f(x, y, z, t) = (y + t - x, 2x + t, \frac{1}{2}x - z).$$

1. *Ecrire la matrice $A := Mat_{\mathbf{B}_4,\mathbf{B}_3}(f)$, de l'application f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.*

   On considère les vecteurs

$$\vec{a}_1 := (1, 1, 0, 1), \vec{a}_2 := (1, 0, 1, 0), \vec{a}_3 := (0, 1, 1, 1), \vec{a}_4 := (1, 2, 0, 0).$$

2. *Montrer que* $A := \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$.

   On considère les vecteurs

$$\vec{b}_1 := (2,0,0), \vec{b}_2 := (0,1,1), \vec{b}_3 := (1,1,0).$$

3. *Montrer que* $\mathbf{B} := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

4. *Ecrire la matrice* $Mat_{\mathbf{B},\mathbf{A}}(f)$ *de l'application* f *dans ces deux bases, à partir de sa définition.*

5. *Donner les matrices de passage* P *et* Q *des bases* A *et* B *dans les bases canoniques respectivement de* $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathbb{R}^3$.

6. *Retrouver la matrice* B *directement grâce aux matrices* A, P *et* Q.

Exercice 7.8 *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$, *on note* $\epsilon := \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ *la base canonique*

$$\vec{e}_1 := (1,0,0), \vec{e}_2 := (0,1,0), \vec{e}_3 := (0,0,1).$$

On considère la famille $F := \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ *définie par*

$$\vec{f}_1 := (1,0,-1),\ \ \vec{f}_2 := (0,1,2),\ \ \vec{f}_3 := (2,1,1).$$

Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *qui envoie*

$$\vec{e}_1 \mapsto \vec{f}_1,\ \ \vec{e}_2 \mapsto \vec{f}_2,\ \ \vec{e}_3 \mapsto \vec{f}_3.$$

1. *Montrer que cette application linéaire est de la forme*

$$f: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{7.15}$$

$$X \mapsto AX. \tag{7.16}$$

   où $A \in M_3(\mathbb{R})$ *est une matrice* 3×3 *que l'on explicitera.*

2. *Décrire l'image* Imf *de* f *et en donner une base.*

3. *Décrire le noyau* $Kerf$ *de* f.

4. *L'application* f *est-elle un isomorphisme ?*

5. *Si oui, décrire l'application réciproque.*

Exercice 7.9 *Soit* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x,y,z) = (x-2y, y-2z, z-2x)$.

Soit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *avec ses coordonnées dans la base canonique* $\mathcal{B}_0$ *de* $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ *une autre base de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer que* f *est une application linéaire.*
2. *Calculer la matrice* A *de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Calculer les coordonnées de* $f(v)$ *dans la base canonique.*
4. *Calculer le rang de* f *et la dimension du noyau de* f.
5. *Calculer la matrice de passage de* $\mathcal{B}_0$ *à* $\mathcal{B}_1$.
6. *En déduire les coordonnées de* v *dans la base* $\mathcal{B}_1$, *et de* $f(v)$ *dans la base* $\mathcal{B}_1$.
7. *Calculer la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}_1$.
8. *Calculer l'inverse de* A *si possible.*

Exercice 7.10 *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f_1 : \quad & \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x-y, y+z) \end{aligned}$$

1. *Montrer que* f_1 *est linéaire*
2. *Déterminer* $Ker(f_1)$.

Exercice 7.11 *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f_2 : \quad & \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x, y-x, x) \end{aligned}$$

1. *Montrer que* f_2 *est linéaire.*
2. *Déterminer* $Ker(f_2)$.
3. *Déterminer* $Im(f_2)$.

Diagonalisation des matrices carrées et des endomorphisme en dimenssion finie

8.1 Changement de bases

8.1.1 Matrice de passage

Considérons une base dite ancienne base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ et une nouvelle base $B' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \cdots, \vec{e'}_n)$ de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{e'}_1 = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + \cdots + p_{n1}\vec{e}_n = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}_B . \quad (8.1)$$

De même,

$$\vec{e'}_2 = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + \cdots + p_{n2}\vec{e}_n = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}_B , \cdots , \vec{e'}_n = p_{1n}\vec{e}_1 + p_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{e}_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}_B \quad (8.2)$$

Nous pouvons les regrouper, en les juxtaposant, ces n colonnes en une matrice :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

appelée matrice de passage de B à $B^{'}$ et formée des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base. Cette matrice est une matrice carrée d'ordre n. inversible. Retenons donc que la matrice de passage de B à $B^{'}$ est la matrice de $B^{'}$ dans la base B.

8.1.2 Formules de changement de bases

Formules de changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de bases B et $B^{'}$ et P la matrice de passage de B et $B^{'}$. Soit X la matrice des coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in E$ dans la base B et $X^{'}$ la matrice des coordonnées du même vecteur dans la base $B^{'}$. On a

$$X = PX^{'}$$

Pour obtenir les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, il suffit d'inverser cette relation $X^{'} = P^{'}X$.

Formules de changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers lui-même (donc un endomorphisme). Si M et $M^{'}$ désignent les matrices représentatives de f dans les bases B et $B^{'}$ 'est-à-dire:

$$M = mat_B(f) \quad \text{et} \quad M^{'} = mat_{B^{'}}(f). \tag{8.4}$$

On a donc:

$$M^{'} = P^{'}.M.P. \tag{8.5}$$

La matrice de passage notée P de B à $B^{'}$ s'obtient en écrivant en colonne les coordonnées de $B^{'}$ dans la base B. Si P est la matrice de passage de B à $B^{'}$, $P^{'}$ est la matrice de passage de $B^{'}$ à B.

Exemple 8.1 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers lui-même, dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est donnée par:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer sa matrice $M^{'}$ dans la base $B^{'} = (\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{v} = (5, 3)$.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Solution

En effet, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_B$. La matrice de passage de B à B' est donc:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est:

$$P' = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans la base B est alors:

$$M' = P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} 33 & 54 \\ -19 & -31 \end{pmatrix}$$

Matrices semblables

Deux matrices M et M', carrées d'ordre n, sont dites semblables s'il existe une matrice P carrée d'ordre n inversible telle que:

$$M' = P^{-1}.M.P$$

Exemple 8.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension 3, de base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit*

$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \;\; \vec{e'}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \;\; \vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

1. *Montrer que $B' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ est une base de E.*

2. *Soit f un endomorphisme de E tel que*

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

   Déterminer $mat_{B'}(f)$.

8.2 Réduction des endomorphismes

8.2.1 Eléments propres d'un endomorphisme

Exercice introductif

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice, dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est donnée par:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

. Considérons les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = (-2, 1)$ et $\vec{v} = (1, 2)$. On a:

$f(\vec{u}) = M.\vec{u} = (4, -2) = -2\vec{u}$

$f(\vec{v}) = M.\vec{v} = (3, 6) = 3\vec{v}$.

Nous constatons alors que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à leurs images respectives par f. Si nous considérons la base $B^{'}$ forme par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors la matrice de f dans $B^{'}$ s'écrit:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

. En utilisant les résultats sur le changement de base, nous pouvons écrire:

$$M^{'} = P^{-1}.M.P$$

où

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base B à la base $B^{'}$. Nous constatons que, dans la base $B^{'}$ la matrice de f est plus simple car elle est diagonale.

Les images des vecteurs de $B^{'}$ leurs sont colinéaires. A cause de cette propriété particulière de colinéarité entre $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ d'une part, $\vec{v}$ et $f(\vec{v})$ d'autre part, nous disons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs propres de f et M** et que les coefficients de proportionnalité entre ces vecteurs et leurs images respectives (c'est-à-dire -2 et 3) sont des **valeurs propres de f et de M**.

Définition 8.3 *Soit B une base de $\mathbb{R}^n$ et f un andomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice, dans la base B est M. Un vecteur non nul $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé **vecteur propre** de f (ou de M) si $f(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$. Dans ce cas $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ où λ est la **valeur propre** de f (ou de M) asociée à $\vec{u}$.*

Diagonalisation d'un endomorphisme

Définition 8.4 *Considérons le cas particulier où l'on peut trouver n vecteurs propres $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}$ formant une base $B^{'}$, associés respectivement, à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Dans ce cas la matrice $M^{'}$ de f dans la base $B^{'}$ est **diagonale** et **ses éléments diagonaux** sont les réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.*

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

On a alors la relation $M' = P^{-1}.M.P$ où P est la matrice de passage de B à B'. La matrice M est dite **diagonalisable** car elle est semblable à une matrice diagonale M'.

Condition suffisante de diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Si f admet **n valeurs propres deux à deux distinctes** alors f est **diagonalisable** et tout **sous-espace vectoriel** de f est de dimension 1.

8.3 Diagonalisation d'une matrice carrée

8.4 Eléments propres d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- On appelle valeur propre de A, tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe une matrice colonne non nulle X vérifiant $AX = \lambda X$.
- On appelle vecteur propre de A toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on nulle telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $AX = \lambda X$.

Remarque 8.5

λ est vecteur propre de A si et seulement si $(A - \lambda I_n)$ n'est pas inversible.

Toute matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes.

A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de .

Pour diagonaliser une matrice M il faut donc trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres d'une application linéaire de matrice M.

8.4.1 Polynôme caractéristique

Etant donné une matrice carrée A d'ordre n, on appelle **polynôme caractéristique de A** et on note $P(\lambda)$ le déterminant de la matrice $(A - \lambda I_n)$.

$$P(\lambda)$$

est un polynôme de degré n et ses racines sont les valeurs propres de A. On trouve $P(\lambda)$ en rajoutant des $-\lambda$ sur la diagonale de A et en calculant le déterminant obtenu. Ainsi

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_n). \tag{8.7}$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{alors} \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{8.8}$$

Théorème 8.6 • *La matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D telle que:*

$$D = P^{-1}.A.P \quad \textit{ou bien} \quad A = P.D.P^{-1} \tag{8.9}$$

Diagonaliser A consiste à déterminer P et D.

- *La matrice A est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire T telle que $T = P^{-1}.A.P$ ou bien $A = P.T.P^{-1}$*
  Trigonaliser A consiste à déterminer P et T.

8.4.2 Algorithme de diagonalisation

1. Trouver le polynôme caractéristique $P(lambda)$ de la matrice A: $P(lambda) = det(A - \lambda I_n$.

2. Trouve les racines de $P(lambda)) = 0$ pour obtenir les valeurs propres de A.

3. Pour chaque valeur propre ainsi trouvée, faire (a) et (b):

   (a) Former la matrice $M = A - \lambda I_n$

   (b) Trouver une base de l'espace des solutions du système homogène $MX = 0$ ou bien $(A - \lambda I_n)X = 0$ (les vecteurs de bases sont des vecteurs propres linéairement indépendants de A, associés à λ.

4. Considérer l'ensemble: $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \cdots, \vec{u_p}\}$ de tous les vecteurs propres obtenus à l'étape 3.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

(a) Si $p \neq n$ alors la matrice A n'est pas diagonalisable.

(b) Si $n = p$, soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \cdots, \vec{u_p}$ alors $D = P^{-1}.A.P$ soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{8.10}$$

où les λ_i sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\vec{u}_i$

8.4.3 Quelques propriétés et théorèmes

Propriété 8.7 *Soit une matrice carrée A d'ordre 2 et $P(\lambda)$ son polynôme caractéristique qui est donc de degré 2. Alors, on a 3 possibilités:*

1. *Si $P(\lambda)$ admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2: nous pouvons trouver deux vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associés respectivement à ces deux valeurs propres et formant une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice A se diagonalise alors dans cette base.*

2. *Si $P(\lambda)$ admet une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$: cette racine est l'unique valeur propre de A: ou bien on ne peut pas trouver deux vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associés à λ_0 formant une base et alors A n'est pas diagonalisable; ou bien on peut trouver deux tels vecteurs et A est diagonalisable et l'on est alors dans le cas trivial où A est déjà diagonale ($A = \lambda_0 I_2$).*

3. *Si $P(\lambda)$ n'admet aucune racine réelle alors A n'admet aucune valeur propre réelle et aucun vecteur propre. Elle n'est donc pas diagonalisable.*

Propriété 8.8 *Considérons maintenant le cas d'une matrice carrée A de taille 3. Le polynôme $P(\lambda)$ est alors de degré 3 et l'on a quatre cas possibles concernant ses racines.*

Si $P(\lambda)$ admet trois racines réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ on a la factorisation:

$$P(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \tag{8.11}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A et admettent des vecteurs propres $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ respectivement, formant une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle on peut diagonaliser A. La matrice diagonale semblable à A obtenue a pour éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Si $P(\lambda)$ admet une racine simple λ_1 et une racine double λ_2

$$P(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 \tag{8.12}$$

λ_1 admet alors un vecteur propre $\vec{u}$. Si la valeur propre λ_2 admet deux vecteurs non colinéaires $\vec{v}$ et $\vec{w}$, A est diagonale dans la base formée par ces trois vecteurs. Sinon (c'est-à-dire si λ_2 n'admet qu'un seul vecteur propre $\vec{v}$), A n'est pas diagonalisable.

Si $P(\lambda)$ admet une racine triple λ_1

$$P(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)^3 \tag{8.13}$$

Alors, ou bien on peut trouver trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ indépendants et A est alors diagonalisable: c'est le cas trivial $A = \lambda_1 I_3$, ou bien on ne peut pas trouver trois tels vecteurs et A n'est pas diagonalisable.

Si $P(\lambda)$ admet une seule racine simple λ_1

$$P(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)Q(\lambda) \tag{8.14}$$

où $Q(\lambda)$ est un polynôme du second degré sans racine réelle. On ne peut alors trouver qu'un seul vecteur propre $\vec{u}$ et la matrice A ne peut être diagonalisée.

8.5 Puissance d'une matrice carrée

Considérons d'abord une matrice diagonale D telle que:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{8.15}$$

Il est facile de voir que la puissance r^{ieme} de cette matrice est obtenue en élevant chacun des éléments diagonaux à la puissance r.

$$D^r = \begin{bmatrix} \lambda_1^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^r & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^r \end{bmatrix}. \tag{8.16}$$

On peut alors utiliser ce résultat pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable. En effet, soit A une telle matrice. On peut alors trouver une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $D = P^{-1}.A.P$ que l'on peut réécrire $A = P.D.P^{-1}$.
On a alors:

$$A^r = A.A.\cdots.A = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1}.\cdots.P.D.P^{-1}. \tag{8.17}$$

Comme ces produits matriciels peuvent Ãªtre effectués dans n'importe quel ordre (par associativité), on calcule d'abord les produits $P^{-1}.P$ qui commutent I_n et l'on en déduit:

$$A^r = P^{-1}.D^r.P. \tag{8.18}$$

Comme le calcul de D^r est immédiat, celui de A^r s'en déduit: après miltiplication par P^{-1} et P.

Exercice 8.9 .

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que* $\lambda_1 = -2$,$\lambda_2 = -1$ *et* $\lambda_3 = 0$ *sont valeurs propres de A. Pour chaque valeur propre, trouver un vecteur propre asocié.*

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. *Montrer que* $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont vecteurs propres de A. Montrer que* $\{X_1, X_2, X_3\}$ *ne forme pas une famille libre. Trouver le polynôme caractéristique.*

3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. *Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que* $P^{-1}AP$ *soit diagonalisable.*

Exercice 8.10 .

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *défini par la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres de A.*

2. Trouver les vecteur propres de A et en déduire une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 8.11 .

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous espaces propres associés.

2.

a- Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b- Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 8.12 .

Soit la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A_m et les sous espaces propres associés.

2.

a- Montrer que A_m est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b- Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_mP$ soit diagonale.

3. Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout $n \in (N^\star)$.

4. Soient les suites réelles (x_n), $(_n)$ et (z_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n & \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases}$$

avec $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ *et* $z_0 = -1$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

a- *Montrer que* $U_n = (A_{-2})^n U_0 \quad \forall\, n \in (N^\star)$.

b- *En déduire* x_n,, y_n, *et* z_n, *en fonction de* n.

Exercice 8.13 .

Soit le $\mathbb{R}-$*espace vectoriel* $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : degP \leq 2\}$ *muni de sa base canonique* $B = (1, X, X^2)$.

Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *défini par:*

$$f(P) = P' + P \qquad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

où P' est polynôme dérivé de P.

1. *Déterminer la matrice de* f *relativement à la base* B.

2. f *est-il diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*? Justifier votre réponse.*

Exercice 8.14 .

On munit $\mathbb{R}^3$ *de sa base canonique* $\mathbb{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ *et on considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$f(e_1) = e_1 + e_3; \qquad f(e_2) = e_1 + e_2; \qquad f(e_3) = -2e_2 + 2e_3.$$

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. *Donner la matrice de* f *relativement à* $\mathbb{B}_c$.

2. *Calculer l'image* $f(v)$ *pour un vecteur* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

3. *Montrer que* $\mathbb{B} = (v_1, v_2, v_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

4. *Soit* P *la matrice de passage de* $\mathbb{B}_c$ *à* $\mathbb{B}$. *Donner* P.

5. *Calculer* $-2v_1 + 6v_2 + v_3$.

6. *Exprimer* e_1, e_2, e_3 *en fonction de* v_1, v_2, v_3.

7. *En déduire l'inverse de* P.

8. *Déterminer la matrice de* f *relativement à* $\mathbb{B}$.

9. *Déterminer le noyau et l'image de* f.

Exercice 8.15 .

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier que le polynôme caractéristique de* A *est* $P_A(X) = (X-1)^2(2-X)$.

2. *Déterminer les valeurs propres de* A.

3. *Pour chaque valeur propre de* A *déterminer le sous-espace propre correspondant.*

4. *La matrice* A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*? Justifier votre réponse.*

5. *Déterminer* P *tel que* $P^{-1}AP$ *soit diagonale.*

6. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.16 .

Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[x]$ *donné par* $f(P) = P'$. *Calculer la matrice de* f *relativement à la base* $\mathbb{B} = (1, (X-2), (X-2)^2)$.

Exercice 8.17 .

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A.

2. *La matrice* A *est-elle inversible?*

Exercice 8.18 .

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*

2. *Montrer que les réels $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -1$ sont les valeurs propres de A.*

3. *Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre correspondant.*

4. *Montrer que la matrice A est diagonalisable.*

5. *Déterminer P tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

6. *Calculer A^n pour un entier $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 8.19 .

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.

a- *Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.*

b- *En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et diagonaliser A.*

c- *Calculer $(A)^n$ pour tout $n \geq 1$.*

2. *On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par leurs termes initiaux $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 1$ et par des relations de récurrence:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + z_n \\ y_{n+1} = 2y_n \\ z_{n+1} = x_n + 2z_n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n, pour tout $n \geq 1$.

3.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

a Montrer que A vérifie la relation suivante:

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$$

où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

b- Donner l'expression de A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

4. Résoudre le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1 + y_3 \\ y_2'(t) = 2y_2 \\ y_3'(t) = y_1 + 2y_3 \end{cases}$$

Exercice 8.20 .

Soit la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A_α et leurs ordres de multiplicité.

2.

a- Pour quelle valeur de α, la matrice A_α est diagonalisable? Justifier votre réponse.

3. Dans ce cas diagonaliser A_α et calculer $(A_\alpha)^n$ pour tout $n \geq 1$

Deuxième partie :

ANALYSE INITIALE POUR INGENIEURS

CHAPITRE NEUF

FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

9.1 GENERALITES

9.1.1 Notion de fonction

Soient E et F deux ensembles non vides. Une fonction f de E vers F est une correspondance entre les éléments de E et ceux de F, telle que, à tout élément x de E associe au plus un élément de F, noté $f(x)$ s'il existe.

Notations 9.1

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

1. E est l'ensemble de départ de f.

2. F est l'ensemble d'arrivée de f.

3. L'élément $f(x)$ est l'image de x par f, et, x est un antécédent de y par f

.

9.1.2 Fonctions numériques

Dans le cas où les ensembles E et F sont des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$, la fonction f est dite fonction numérique d'une variable réelle. En d'autres termes, une fonction numérique d'une variable réelle est une fonction dont l'ensemble de départ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, x et $f(x)$ seront des nombres réels.

On appelle application toute fonction f dont l'ensemble de départ est égal à son ensemble de définition noté D_f défini par :

$$D_f = \{x \in E / f(x) \text{ existe dans } F\}$$

Exercice 9.2 *I-Détermine l'ensemble de définition D de la fonction f dans chacun des cas ci-après :*

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longmapsto \frac{2+\sqrt{x+3}}{|x+2|-8}$
2. $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longmapsto \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
3. $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longmapsto \frac{1}{x-E(X)}$

II- Justifie que la fonction suivante est une application

$$g :]-\infty, -2[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{ln(-x-2)}{x-8}$$

9.2 LIMITE ET CONTINUITE

9.2.1 Notion de limite

Définition 9.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est une extrémité de I (et pas nécessairement dans I). Soit ℓ un réel. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I, (\mid x - a \mid < \alpha \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid < \epsilon).$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.

La limite ℓ, si elle existe, est unique.

Exercice 9.4 *Montre que* $\lim_{x\to 0}(2x+3) = 3$

PROOF

Posons $f(x) = 2x+3$. Soit $\epsilon > 0$. Cherchons $\alpha > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mid x - 0 \mid < \alpha \;\Rightarrow \mid f(x) - 3 \mid < \epsilon$.

$\mid f(x) - 3 \mid = \mid 2x \mid$, donc $\mid 2x \mid < \epsilon \Longleftrightarrow \mid x \mid < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, $\mid x \mid < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \mid f(x) - 3 \mid < \epsilon$. On prend alors $\alpha = \frac{\epsilon}{2}$.

Définition 9.5 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit ℓ un réel.*

1. *Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est l'extrémité droite de I (et pas nécessairement dans I). On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs inférieures et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I, (-\alpha < x - a < 0 \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid < \epsilon).$$

2. *Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est l'extrémité droite de I (et pas nécessairement dans I). On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I, (0 < x - a < \alpha \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid < \epsilon).$$

On a alors les résultats suivant :

La fonction f a une limite réelle en a si et seulement si f a une limite à droite réelle et une limite à gauche réelle en a et ces limites sont égales. De plus,

1. si $a \notin I$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \end{cases}$

2. si $\in I$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \\ f(a) = \ell. \end{cases}$

Opérations sur les limites

Nous regroupons dans des tableaux les résultats essentiels concernant les limites de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions. Dans ces tableaux, a, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels. Ces résultats restent valables pour les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

- Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indétermination

- Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	ℓ' $(\ell'\neq 0)$	ℓ' $(\ell'\neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$\ell\ell'$	$\begin{cases} +\infty \ si \ \ell'>0 \\ -\infty \ si \ \ell'<0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty \ si \ \ell'<0 \\ -\infty \ si \ \ell'>0 \end{cases}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indétermination

- Limite de quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ' $(\ell'\neq 0)$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	ℓ' $(\ell'\neq 0)$	ℓ' $(\ell'\neq 0)$	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} (\frac{f}{g})(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\begin{cases} +\infty \ si \ \ell'<0 \\ -\infty \ si \ \ell'>0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty \ si \ \ell'>0 \\ -\infty \ si \ \ell'<0 \end{cases}$	Indé	Indé

Limites Remarquables

• Rappels sur les limites trigonométriques particulières

1 - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$; **2** - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinax}{x} = a \ (a\in\mathbb{R}^*)$; **3** - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinax}{bx} = \frac{a}{b} \ (a,b\in\mathbb{R}^*)$
4 - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tanx}{x} = 1$; **5**-$\lim\limits_{x\to 0} \frac{tanax}{x} = a \ (a\in\mathbb{R}^*)$; **6**-$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$ et **7**-$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$

- **Limites usuelles du logarithme népérien :**

1 - $\lim\limits_{x\to 0^+} xln(x)=0$ (avec $xln(x)<0$); **2** - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x}=0$;
3 - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+1)}{x}=1$; **4** - $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln(x)}{x-1}=1$; **5** - $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r ln(x)=0$ avec $r\in\mathbb{Q}_+^*$

• **Limites usuelles des fonctions exponentielles :**

1 - $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; **2** - $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; **3** - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$;
4 - $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$; **5** - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{lnx}=+\infty$; **6** - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$; **7** - $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$.

• **Limites usuelles des fonctions puissances :**

Soit $a,\ \alpha\in\mathbb{R}_+^*$

1 - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$; **2** - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x^\alpha}=0$; **3** - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^\alpha ln(x)=0$; **4** - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x}=0$;
6 - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$; **7** - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$; **8** - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$; **9** - $\lim\limits_{x\to-\infty}\mid x\mid^\alpha e^x=0$;
10 - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$; **11** - $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

THEOREMES DE COMPARAISON

f, g et h sont définies sur un intervalle I et a un point de I ou une borne de I.

1. Si pour tout $x\in I, f(x)\leq g(x)$ alors $\lim\limits_a f\leq\lim\limits_a g$
2. Si pour tout $x\in I, f(x)\leq g(x)$ et alors $\lim\limits_a f=+\infty$ alors $\lim\limits_a g=+\infty$
3. Si pour tout $x\in I, f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_a g=-\infty$ alors $\lim\limits_a f=-\infty$
4. Si pour tout $x\in I, h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_a h=\lim\limits_a g=\ell$ (avec $\ell\in\mathbb{R}$) alors $\lim\limits_a f=\ell$
5. Si pour tout $x\in I, \mid f(x)-\ell\mid\leq g(x)$ et $\lim\limits_a g=0$ alors $\lim\limits_a f=\ell$

Exercice 9.6 *I-Calculer les limites suivantes:*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sin(x)}{1-cos(x)}$

4. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

II- Montrer en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point ce qui suit :

1. $\lim\limits_{x \to 1}(3x+3) = 6$

2. $\lim\limits_{x \to 1}(x^2+x+1) = 3.$

9.2.2 CONTINUITE

Définition 9.7 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I.*

1. *On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

2. *on dit que f est continue à gauche en a* $\iff \begin{cases} a \in D_f \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a) \end{cases}$

3. *On dit que f est continue à droite en a* $\iff \begin{cases} a \in D_f \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a \end{cases}$

4. *On dit que f est continue en a* $\iff \begin{cases} a \in D_f \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a) \end{cases}$

5. *On dit que le point a est un point de discontinuité de première espèce si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ sont finies et ne sont pas égales.*
   La différence
   $$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) - \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$$
   est appelé le saut de la fonction au point a.

6. *On dit que le point a est un point de discontinuité de deuxième espèce si l'une des limites $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ est égale à ∞ ou n'existe pas.*

Théorème 9.8 *1. On dit qu'une fonctions f est continue sur un intervalle ouvert I si f est continue en chaque point de I.*

2. f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'ouvert $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

3. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, elle réalise une bijection de I sur $f(I)$ qui est un intervalle de même nature que I et dont les bornes sont les limites fr f en celle de I. Sa réciproque est continue sur $f(I)$ strictement monotone et variant le même sens que f.

Prolongement par continuité

Soit a et ℓ deux nombres réels, f une fonction non définie en a telle que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ (\ell \in \mathbb{R})$ et D_f le domaine de définition de f. Alors la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \ si \ x \in D_f \\ g(a) = \ell \end{cases}$$

est continue en a. La fonction g est appelé prolongement par continuité de f au point a.

Exercice 9.9 *1. On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = \frac{\text{é}x - sin(5x)}{7x}.$$

Démontrer que f admet un prolongement par continuité ϕ et définir ϕ.

2. Soit la fonction g définie par:

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x^2 - 8} \ si \ x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} \ si \ x > 3 \end{cases}$$

Montrer que $a = 3$ est un point de discontinuité de première espèce et calculer le saut de la fonction au point a.

9.3 DERIVATION

Définition 9.10 *f est une fonction numérique d'une variable réelle x et d'ensemble de définition D_f, a est un réel tel que $a \in D_f$.*

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

1. *f est dérivable en a s'il existe un réel ℓ tel que :*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell.$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.

2. *f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel ℓ_1 tel que*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell_1.$$

ℓ_1 est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a et il est noté $f'_g(a)$.

3. *f est dérivable à droite en a s'il existe un réel ℓ_2 tel que*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell_2.$$

ℓ_2 est appelé le nombre dérivé de f à droite en a et il est noté $f'_d(a)$.

4. *f est dérivable à droite en a il et seulement si f est dérivable à gauche en a, f est dérivable à droite en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$.*

5. *f est dérivable sur un $[a,b]$ si elle est dérivable en chaque point de $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.*

6. *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Interprétation géométrique du nombres dérivé

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative d'une fonction f. M_0 est le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse a.

1. Si f est dérivable en a alors $(\mathcal{C})$ admet une tangent en M_0 d'équation :

$$(T):y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

2. M_0 est un point anguleux lorsque $(\mathcal{C})$ admet en M_0 deux demi-tangentes de supports distincts. C'est le cas par exemple lorsque $f'_g(a)\neq f'_d(a)$.

3. M_0 est un point d'inflexion lorsque la tangente à $(\mathcal{C})$ en M_0 traverse $(\mathcal{C})$. C'est le cas par exemple lorsque $f'(x)$ s'annule sans changer de signe.

9.3.1 Majorant, suprémum, Minorant, infirmum, Maximum ou Minimum d'une fonction

soit f une fonction définit sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f admet un majorant sur I, S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M \; \forall \; x \in I$. M est donc un majorant de f sur Iet tout nombre réel supérieur à M est aussi un majorant de f sur I.

2. Le plus petit des majorant de f sur I est appelé suprémum de f sur I et est noté

$$\sup_{x \in I} f(x)$$

3. Si f est une fonction au moins 2 fois dérivable en a alors f admet un maximum en a si

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0 \end{cases}$$

4. On dit que f admet un minorant sur I, S'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m \; \forall \; x \in I$. m est donc un minorant de f sur I et tout nombre réel inférieur à m est aussi un minorant de f sur I.

5. Le plus grand des minorant de f sur I est appelé infirmum de f sur I et est noté

$$\inf_{x \in I} f(x)$$

6. Si f est une fonction au moins 2 fois dérivable en a alors f admet un minimum en a si

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases}$$

7. Une fonction f admet un extremum (Maximum ou Minimum) lorsque sa dérivée s'annule et change de signe.

Notations 9.11 *Par convention, on note* $\sup_{x \in I} f(x) = +\infty$ *lorsque* f *n'est pas majoré sur* I *et* $\inf_{x \in I} f(x) = -\infty$ *lorsque* f *n'est pas minoré.*

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

9.3.2 Fonction convexe , fonction concave

Soit f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. f est convexe sur I si $(\mathcal{C})$ est au dessus de toutes ses tangentes.

2. f est concave sur I si $(\mathcal{C})$ est au dessous de toutes ses tangentes.

Théorème 9.12 *1. f est convexe sur I si $\forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$.*

2. f est concave sur I si $\forall x \in I$ $f''(x) \leq 0$.

9.3.3 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. ON considère la fonction f, continue sur un domaine D,$[a, b] \subset D$.

I	f(I)	f(I)
I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)[$
$[a, b[$	$[f(a), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)[$	$]f(a), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)[$	$]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)[$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)]$
$]-\infty, b[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)[$	$]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$\mathbb{R}$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Exercice 9.13 *Soit f la fonction numérique de la variable x définie par:*

$$F(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^3 - x + 5\, si\, x \leq -1 \\ 2x^2 + 6x + 9\, si\, -1 < x < 1 \\ \frac{3x-20}{x-2}\, si\ x \geq 1 \end{cases} \tag{9.1}$$

1. *Détermine l'ensemble de définition E de f*

2. *Etudie la dérivabilité de en -1 et en 1.*

9.3.4 Fonction dérivée

Théorème 9.14 (composée de fonctions) *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et soit g une fonction dérivable sur J. Alors la fonction gof est dérivable sur I et*

$$\forall x \in I,\ gof(x) = f'(x)(g'of)(x)$$

Théorème 9.15 *Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K telle que $\forall x \in K,\ f'(x) \neq 0$. Alors*

1. *f réalise une bijection de K sur $f(K)$;*

2. *la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et on a :*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

Remark 9.3.1 *L'ensemble de dérivabilité de f^{-1} est*

$$D = f(K)\backslash\{f(x)/f'(x) = 0\} = \{x \inf(K)/f'[f^{-1}(x)] \neq 0\} \tag{9.2}$$

9.3.5 Théorème des accroissements finis

Dans cette partie, nous préciserons un théorème majeur d'Analyse, source de formules extrêmement fécondes que nous verrons dans la partie suivante.

Théorème 9.16 (Rolle) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un point $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remark 9.3.2 *géométriquement, ce théorème nous montre qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.*

Théorème 9.17 (accroissements finis) *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$. f vérifie les conditions du théorème des accroissements finis si*

1. *f est continue sur un intervalle $[a;b]$,*

2. *f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.*

Alors, il existe un point $c \in]a;b[$ tel que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

soit

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

La valeur c est appelée ***valeur intermédiaire****.*

Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ et si pour tout $x \in]a;b[$, $g'(x) \neq 0$, alors il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Remark 9.3.3 *Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB), avec $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.*

Remark 9.3.4 *Lorsque $f(b) = f(a)$, on a $f'(c) = 0$ et on retrouve e théorème de Rolle.*

On a:

$$\begin{aligned} c \in]a;b[&\Leftrightarrow a < c < b \\ &\Leftrightarrow 0 < c-a < b-a \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{c-a}{b-a} < 1 \end{aligned}$$

Posons

$$\theta = \frac{c-a}{b-a}.$$

Alors, on a :

$$c = a + \theta(b-a) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Alors la formule des accroissements finis devient :

$$f(b)-f(a) = f'[a+\theta(b-a)](b-a) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

En posant $b = x$ et $a = x_0$, on a :

$$f(x)-f(x_0) = f'[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Formule des accroissement finis

En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant

$$a = x,\ b = x + h,\ c = x + \theta h \ avec\ 0 < \theta < 1,$$

On obtient la formule des accroissements finis :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h).$$

9.3.6 Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur I, un sous ensemble de $\mathbb{R}$. f' est donc la dérivée première de f sur I. Si f' à son tour admet une dérivée première, alors cette dernière sera appelée dérivée seconde de f sur I et sera notée

$$f''(x) \ ou\ \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Par itération, on définit la dérivée d'ordre n ou n-ième de f sur I notée:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Théorème 9.18 (Formule de Leibniz) *Soit f, f deux fonctions définies sur I, un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées d'ordre n, alors on a:*

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} c_n^i f^{(i)}(x) \cdot g^{(n-i)}(x) \ avec\ c_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

9.3.7 Règle de l'Hospital (ou Hôpital)

La règle de l'Hospital est une règle qui est très utilisé pour le calcul de limites. Elle est donc utilisée pour lever au point a les indéterminations du type :

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}.$$

Théorème 9.19 (Règle de l'Hospital I) *Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a - h; a + h[\setminus\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ et soit ℓ un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si f et g sont dérivables sur I et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ et si $\forall\, x \in I\ g'(x) \neq 0$, alors,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

La règle de l'Hospital est valable lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$. Lorsque la fonction g tends vers l'infini et f n'est pas localement bornée, on a la version suivante :

Théorème 9.20 (Règle de l'Hospital II) *Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a-h; a+h[\setminus\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ (ou au voisinage de ∞ si $a = \infty$) et soit ℓ un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si f et g sont dérivables sur I et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et si $\forall\, x \in I\ g'(x) \neq 0$, alors,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \ \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exercice 9.21 *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{ln(x)-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-Cos(x^2)}{x^3 Sin(x)}$.

9.3.8 Formule de Taylor et de Maclaurin

La formule des accroissements finis fournit une approximation d'une fonction par une fonction affine au voisinage d'un point. Dans cette partie, nous allons établir que sous réserve de conditions supplémentaires, on peut obtenir une approximation d'une fonction par un polynôme.

Théorème 9.22 (formule de Taylor-Lagrange) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur $[a; b]$ et est $n+1$ fois dérivable sur $]a; b[$. Alors, pour tout x appartenant à $[a; b]$, il existe un point $c \in]a; x[$ tel que :*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a.

Théorème 9.23 (Formule de Taylor-Mac Laurin) *En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant $c = a + \theta h$ avec $0 < \theta < 1$, on obtient la formule de Taylor-Mac Laurin :*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Théorème 9.24 (Développement limité : Formule de Taylor-Young) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur $[a;b]$. Alors, pour tout $x \in [a;b]$ voisinage du point a, on a :*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \circ\left((x-a)^n\right).$$

Théorème 9.25 (Composition des développements) *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction admettant en 0 un développement limité d'ordre n et vérifiant :*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

et $g : D_g \to \mathbb{R}$ une fonction admettant en 0 un développement limité d'ordre n et

$$f(D_f) \subset D_g$$

. Au voisinage de 0, on a :

$$f(x) = P(x) + \circ)(x^n) \text{ et } g(x) = Q(x) + \circ(x^n).$$

Alors $g \circ f$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n qui s'écrit :

$$g \circ f(x) = R(x) + \circ(x^n)$$

où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans $Q \circ P$ que des termes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 9.26

1. *Effectuer le développement par la formule de Taylor-Lagrange de la fonction $f(x) = ln(x)$ à l'ordre n au point $a = 1$.*

2. *Effectuer le développement par la formule de Taylor-Mac Laurin de la fonction $f(x) = ln(x)$ à l'ordre n au point $a = 1$.*

3. *Effectuer le développement d'ordre 4 au voisinage de $a = 0$ des fonctions :*

$$f(x) = ln(x+1) \text{ et } h(x) = \frac{-2}{1 + ln(x+1)}.$$

Développement limité des fonctions usuelles

Nous avons les développements limités à tout ordre en $a = 0$ des fonctions usuelles :

$$
\begin{aligned}
&e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n).\\
&e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} = \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \circ(x^n).\\
&ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + \circ(x^n).\\
&ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \circ(x^n).\\
&\forall(1\alpha \in \mathbb{R}, \nLeftarrow\ (1+x)^\alpha = 1 + x - \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n).\\
&\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n).\\
&\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + \circ(x^n).\\
&\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots + (-1)^{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + \circ(x^n).\\
&Sin(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \circ(x^{2p+2}).\\
&Cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \circ(x^{2p+1}).
\end{aligned}
$$

9.4 Fonctions circulaires et leurs inverses

Rappels

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ Cos^2(x) + Sin^2(x) = 1\\
&\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\},\ tan(x) = \frac{Sin(x)}{Cos(x)}\\
&\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\},\ Cotan(x) = \frac{Cos(x)}{Sin(x)}
\end{aligned}
$$

Les fonctions Sin, Cos, tan et $Cotan$ sont dérivables sur leur ensemble de définition.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Cos'(x) = -Sin(x)\ et\ Sin'(x) = Cos(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\},\ tan'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{Cos^2(x)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\},\ Cotan'(x) = -1 - Cotan^2(x) = -\frac{1}{Sin^2(x)}$$

Nous avons les formules suivantes $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$Cos(a+b) = Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(b)$$
$$Cos(a-b) = Cos(a)Cos(b) + Sin(a)Sin(b)$$
$$Sin(a+b) = Sin(a)Cos(b) + Cos(a)Sin(b)$$
$$Sin(a-b) = Sin(a)Cos(b) - Cos(a)Sin(b)$$
$$tan(a+b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)\cdot tan(b)}$$
$$tan(a-b) = \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)\cdot tan(b)}$$
$$sin(a)Sin(b) = \frac{1}{2}[Cos(a-b) - Cos(a+b)]$$
$$Sin(a)Cos(b) = \frac{1}{2}[Sin(a+b) - Sin(a-b)]$$
$$Cos(a)Cos(b) = \frac{1}{2}[Cos(a-b) + Cos(a+b)]$$
$$Sin(a) - Sin(b) = 2sin(\frac{a-b}{2})Cos(\frac{a+b}{2})$$
$$Sin(a) + Sin(b) = 2sin(\frac{a+b}{2})Cos(\frac{a-b}{2})$$
$$Cos(a) - Cos(b) = -2sin(\frac{a-b}{2})Sin(\frac{a+b}{2})$$
$$Cos(a) + Cos(b) = 2Cos(\frac{a-b}{2})Cos(\frac{a+b}{2})$$
$$Sin(2a) = 2Sin(x)Cos(x)$$
$$Cos(2a) = Cos^2(a) - Sin^2(a) = 2Cos^2(a) - 1 = 1 - 2Sin^(a)$$

La fonction Sin est périodique de période 2π, impaire et $\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

$$Sin(\pi + a) = -Sin(a)$$
$$Sin(\pi - a) = sin(a)$$
$$Sin(\frac{\pi}{2} + a) = Cos(a)$$
$$Sin(\frac{\pi}{2} - a) = Cos(a)$$

La fonction Cos est périodique de période 2π, paire et $\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

$$Cos(\pi + a) = -Cos(a)$$
$$Sin(\pi - a) = -Cos(a)$$
$$Cos(\frac{\pi}{2} + a) = -Sin(a)$$
$$Cosn(\frac{\pi}{2} - a) = Sin(a)$$

La fonction Ta est périodique de période π, impaire et $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\}$, on a :

$$tan(\frac{\pi}{2} + a) = -Cotan(a)$$
$$tan(\frac{\pi}{2} - a) = Cotan(a)$$

Nous avons les équivalentes suivantes :

$$Cos(a) = Cos(b) \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \, oua = -b + 2k\pi \;\; aveck \in \mathbb{Z}$$
$$Sin(a) = Sin(b) \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \, oua = \pi - b + 2k\pi \;\; aveck \in \mathbb{Z}$$
$$\forall \ (a, b) \in \left(\mathbb{R}\diagdown(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})\right)^{,} tan(a) = tan(b) \Leftrightarrow a = b + k\pi, \;\; k\text{ß}, \mathbb{Z}$$

9.4.1 Fonction arcsinus

Définition 9.27 *On appelle fonction arcsinus et on note arcsin, la bijection réciproque de la fonction Sinus sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On a : $Sin \; : \; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ *et sa bijection réciproque est*

$$arcsin \;\; : \;\; [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Remark 9.4.1 *1. La fonction arsin est définie sur* $[-1,1]$.

2. $arcsin(a) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-1,1] \\ b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

3. $\forall a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $arcsin(Sin(a)) = a$

4. $\forall a \in [-1,1]$, $Sin(arcsin(a)) = a$

5. $\forall a \in [-1,1]$ $arcsin(-a) = -arcsin(a)$

Propriété 9.28 *1. la fonction arcsin est impaire sur* $[-1,1]$ *c'est-à-dire, pour tout* $x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$ *et* $arcsin(-x) = -arcsin(x)$.

2. *Le graphe de la fonction Sin et celui de arsin sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation y=x).*

3. $arcsin(0) = 0$; $arcsin(\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6})$; $arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$; $arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$; $arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ *et* $arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

4. *la fonction arcsin est dérivable sur* $]-1,1[$ *et on a :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Si* U *est une fonction dérivable sur* I *et*

$$\forall x \in I,\ U(x) \in]-1,1[,$$

alors la composée $arcsin \circ U$ *est dérivable sur* I *et on a :*

$$\forall x \in I,\ (arcsin \circ U)'(x) = \frac{U'(x)}{\sqrt{1-U(x)^2}}.$$

6. $\forall x \in]-1,1[$, $Sin(arcsin(x)) = x$ *et* $Cos(arsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

7. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $arcsin(Sin(x)) = x$ *et* $arcsin(cos(x)) = arcsin\left[Sin(\frac{\pi}{2} - x)\right] = \frac{\pi}{2} - x$.

8. $\forall x \in]-1,1[$, $tan(arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $\forall x \in [-1,0[\bigcup]0,1]$, $Cotan(arcsin(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

x	0		1
$Arcsin'(x)$	1	$+$	$+\infty$ ||
Arsin(x)	0	$\nearrow$	$\pi/2$

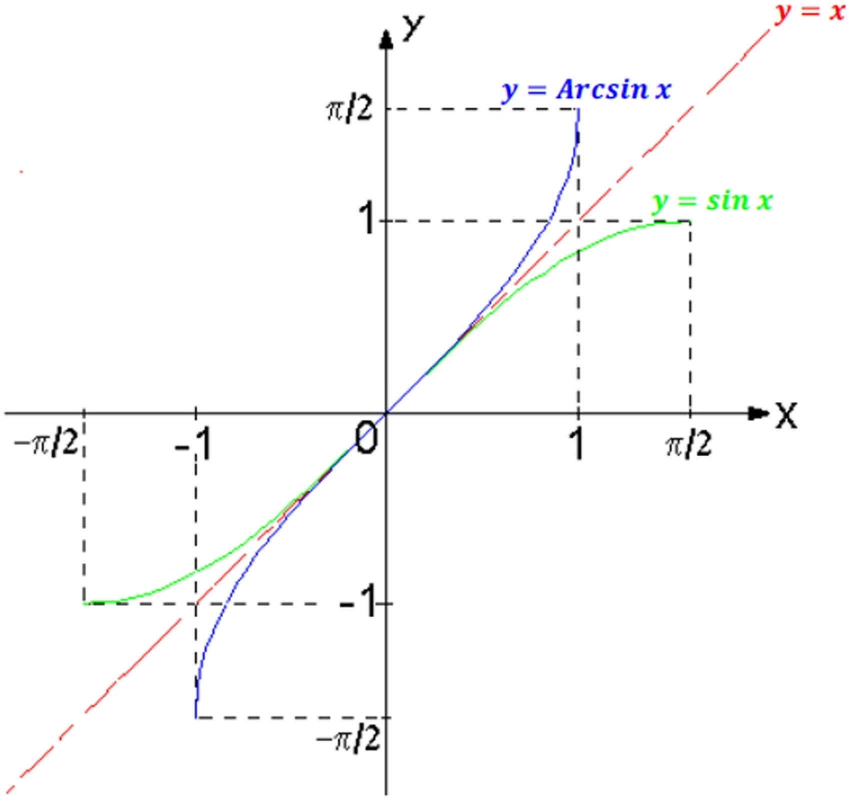


Figure 9.1: Allure de la fonction $f(x) = arcsin(x)$

Exercice 9.29 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right)$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*

2. *Déterminer la dérivée première de f.*

9.4.2 Fonction arcCosinus

Définition 9.30 *On appelle fonction arccosinus et on note arccos, la bijection réciproque de la fonction Cosinus sur $[0, \pi]$.*

On a : $Cos\ :\ [0, \pi] \to [-1, 1]$ et sa bijection réciproque est

$$arccos\ :\ [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Remark 9.4.2
1. *La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$.*

2. $arccos(a) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-1, 1] \\ b \in [O, \pi] \end{cases}$

3. $\forall a \in [0, \pi]$, $arccos(Cos(a)) = a$

4. $\forall a \in [-1, 1]$, $Cos(arccos(a)) = a$

5. $\forall a \in [-1, 1]$ $arcos(-a) = \pi - arcos(a)$.

Propriété 9.31
1. *La fonction arccos n'est ni paire ni impaire. Mais on a pour tout*

$$x \in [-1, 1],\ arccos(-x) = \pi - arccos(x).$$

2. *Le graphe de la fonction arccos et celui de Cos sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

3. *La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :*

$$\forall x \in]-1, 1[,\ arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si U est une fonction dérivable sur I et*

$$\forall x \in I,\ U(x) \in]-1,1[,$$

alors la composée $arccos \circ U$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I,\ (arccos \circ U)'(x) = -\frac{U'(x)}{\sqrt{1-U(x)^2}}.$$

5. $arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, $arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$; $arccos(\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $arccos(1) = 0$; *et* $arccos(-1) = \pi$.

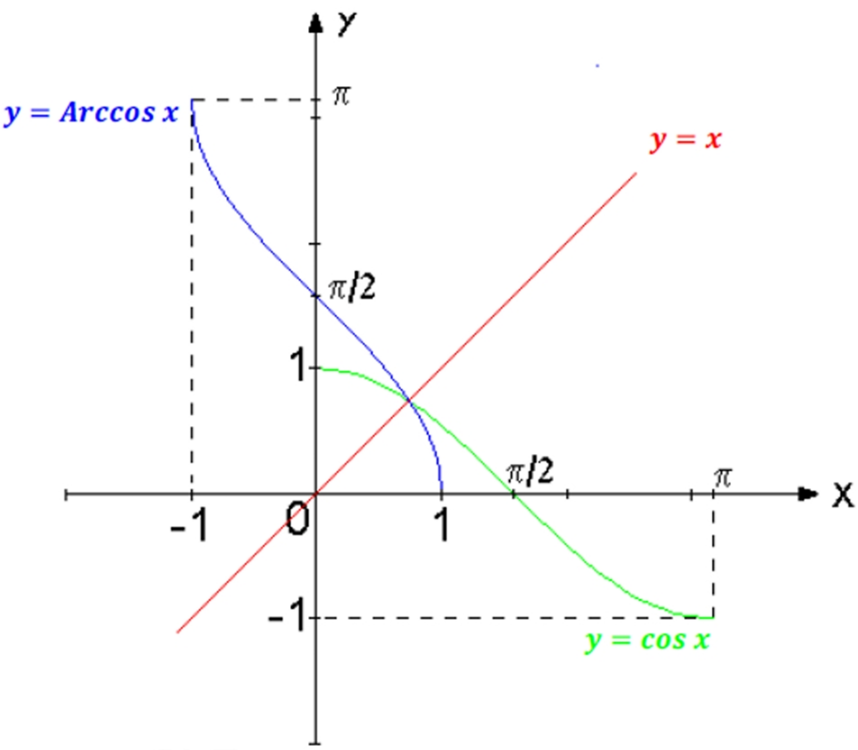
6. $\forall x \in]-1,1[$, $Cos(arccos(x)) = x$ *et* $Sin(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

7. $\forall x \in]-1,1[$, $arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

8. $\forall x \in]-1,1[$, $cotan(arccos(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $\forall x \in [-1,0[\bigcup]0,1]$, $tan(arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

x	-1		1
$Arccos'(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$-$	$-\infty$ $\Vert$
Arccos(x)	π	$\searrow$	0



Exercice 9.32 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*

2. *Déterminer la dérivée première de f.*

9.4.3 Fonction arctangente

Définition 9.33 *On appelle fonction arctangente et on note arctan, la bijection réciproque de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*
On a : $tan\ :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est

$$artan\ :\ \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Remark 9.4.3
1. *La fonction arccos est définie sur $\mathbb{R}$.*

2. $artan(a) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$

3. $\forall a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ arctan(tan(a)) = a$

4. $\forall a \in \mathbb{R},\ tan(arctan(a)) = a$

5. $\forall a \in \mathbb{R}\ artan(-a) = -arctan(a)$.

Propriété 9.34 1. *la fonction arctan est impaire sur* $\mathbb{R}$ *c'est-à-dire, pour tout* $x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ *et* $arctan(-x) = -arctan(x)$.

2. *Le graphe de la fonction tan et celui de arctan sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation* $y = x$*).*

3. $arctan(0) = 0$; $arctan(\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6})$; $arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$; $arcsin(1) = \frac{\pi}{4}$;

$$\lim_{x \to -\infty} arctan(x) = -\frac{\pi}{2},\ \lim_{x \to +\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

4. *la fonction arctan est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

5. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Si* U *est une fonction dérivable sur* I *alors la composée* $arctan \circ U$ *est dérivable sur* I *et on a :*

$$\forall x \in I,\ (arctan \circ U)'(x) = \frac{U'(x)}{1 + U(x)^2}.$$

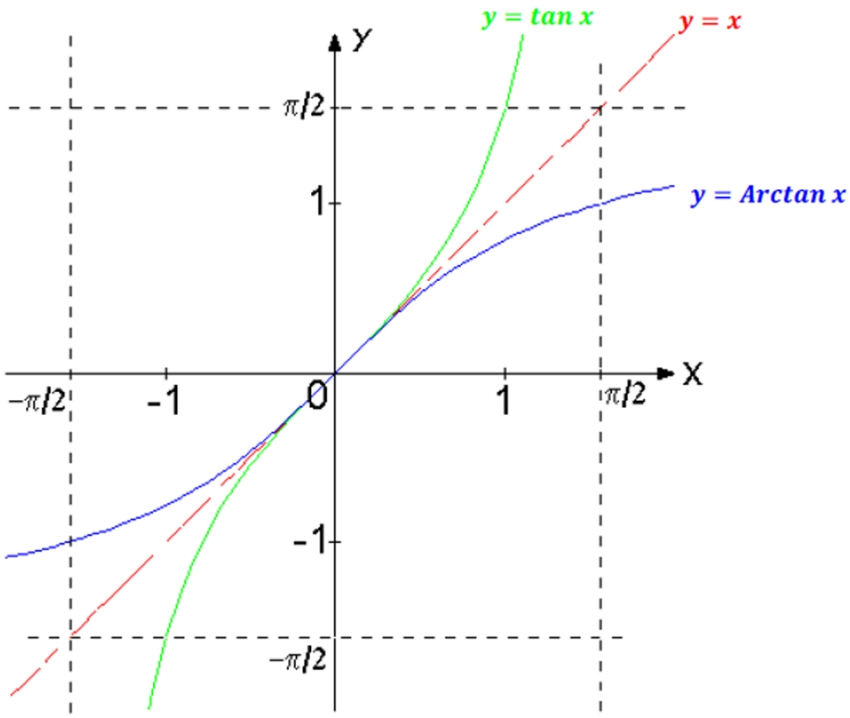
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ arctan(tan(x)) = x$ *et* $arctan(-x)) = -arctan(x)$.

7. $\forall x \in \mathbb{R},\ Cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *et* $Sin(artan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ arctan(x) + arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ si\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ si\ x < 0 \end{cases}$.

9. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ cotan(arctan(x)) = \frac{1}{x}$

x	0		$+\infty$
$Arctan'(x)$	1	$+$	0^+ ‖
Arctan(x)	0	$\nearrow$	$\pi/2$



Exercice 9.35 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*

2. *Déterminer la dérivée première de f.*

9.4.4 Fonction arccotangente

Considérons la fonction cotangente : $cotan :]0, \pi[\to \mathbb{R}$.

Cette fonction est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Ainsi, elle réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $cotan(]0, \pi[) = \mathbb{R}$ avec:

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} cotan(x) = -\infty, \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} cotan(x) = +\infty.$$

Elle admet donc une bijection réciproque appelée fonction arccotangente notée *arccotan* telle que :

$$arccotan : \mathbb{R} \to]0, \pi[.$$

Propriété 9.36 1. *La fonction arccatan est dérivable sur $\mathbb{R}$,*

$$arccotan'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

2.

$$(arccotan \circ U)'(x) = -\frac{U'(x)}{1+[U(x)]^2}$$

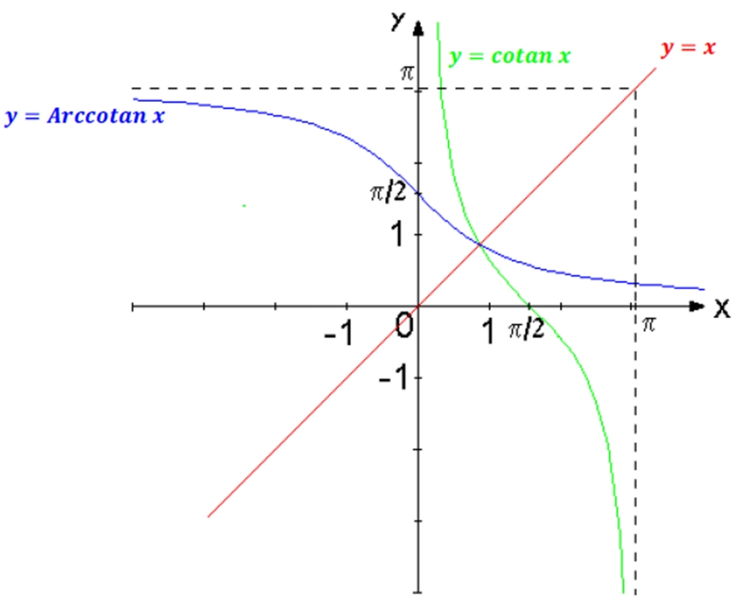
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Sin(arccotan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Cos(arccotan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $tan(arccotan(x)) = \frac{1}{x}$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Cotan(arccotan(x)) = x$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$Arccotan'(x)$	0^-	$-$	0^-
Arccotan(x)	π	$\searrow$	0



Exercice 9.37 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = arccotan\left(\sqrt{x-2}\right)$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*

2. *Déterminer la dérivée première de f.*

9.5 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

9.5.1 Fonctions hyperboliques

Définition 9.38 1. *On appelle fonction* ***cosinus hyperbolique****, la fonction notée* ***ch*** *et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2. *On appelle fonction* ***sinus hyperbolique****, la fonction notée* ***sh*** *et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

3. *On appelle fonction* ***tangente hyperbolique****, la fonction notée* ***th*** *et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

4. *On appelle fonction* ***cotangente hyperbolique****, la fonction notée* ***coth*** *et définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Remark 9.5.1 1. *La fonction ch est paire*

2. *La fonction sh est impaire*

Formules

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) > 0$$

$$sh(0) = 0 \ et \ ch(0) = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) + sh(x) = e^{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) - sh(x) = e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) + sh^2(x) = ch(2x)$$

$$sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$$

$$ch(2x) = 1 + 2sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1 = ch^2(x) + sh^2(x)$$

$$ch^2(x = \frac{1 + ch(2x)}{2}), \ et \ sh^(2x) = \frac{-1 + ch(2x)}{2}$$

$$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y), \ et \ sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$$

$$ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y), \ et \ ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$$

$$th(x+y) = \frac{th(x) + th(y)}{1 + th(x) \cdot th(y)}, \ et \ th(x-y) = \frac{th(x) - th(y)}{1 - th(x) \cdot th(y)}.$$

$$cath(x+y) = \frac{1 + coth(x) \cdot coth(y)}{coth(x) + coth(y)}, \ et \ coth(x-y) = \frac{1 - coth(x) \cdot coth(y)}{coth(x) - coth(y)}$$

$$ch(x) + xh(y) = 2ch(\frac{x+y}{2}) \cdot ch(\frac{x-y}{2})$$

$$ch(x) - ch(y) = 2sh(\frac{x+y}{2}) \cdot sh(\frac{x-y}{2})$$

$$sh(x) + sh(y) = 2sh(\frac{x+y}{2}) \cdot ch(\frac{x-y}{2})$$

$$sh(x) - sh(y) = 2ch(\frac{x+y}{2}) \cdot sh(\frac{x-y}{2})$$

$$th(2x) = \frac{2th(x)}{1 + th^2(x)}$$

Propriété 9.39 *1.* $\forall x \in \mathbb{R}, \ sh'(x) = ch(x)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ ch'(x) = sh(x)$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$

4. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ coth'(x) = 1 - coth^2(x) = -\frac{1}{sh^2(x)}$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1, \ \lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1, \ \lim\limits_{x \to -\infty} coth(x) = -1, \ \lim\limits_{x \to +\infty} coth(x) = 1$

6. $\lim\limits_{x \to 0^-} coth(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x \to 0^+} coth(x) = +\infty$

9.5.2 Fonctions hyperboliques inverses

Fonction argument sinus hyperbolique

Définition 9.40 *La fonction $x \mapsto sh(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $sh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On appelle fonction argument sinus hyperbolique et on note argsh, la bijection réciproque de la fonction sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$. On a $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec la relation*

$$y = argsh(x) \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \text{ et } x = sh(y).$$

Propriété 9.41 *1. La fonction argsh est impaire et est définie sur $\mathbb{R}$.*

2. La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. Si U est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la composée $argsh \circ U$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I,\ (argsh \circ U)'(x) = \frac{U'(x)}{\sqrt{1+(U(x))^2}}.$$

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(argsh(x)) = x$

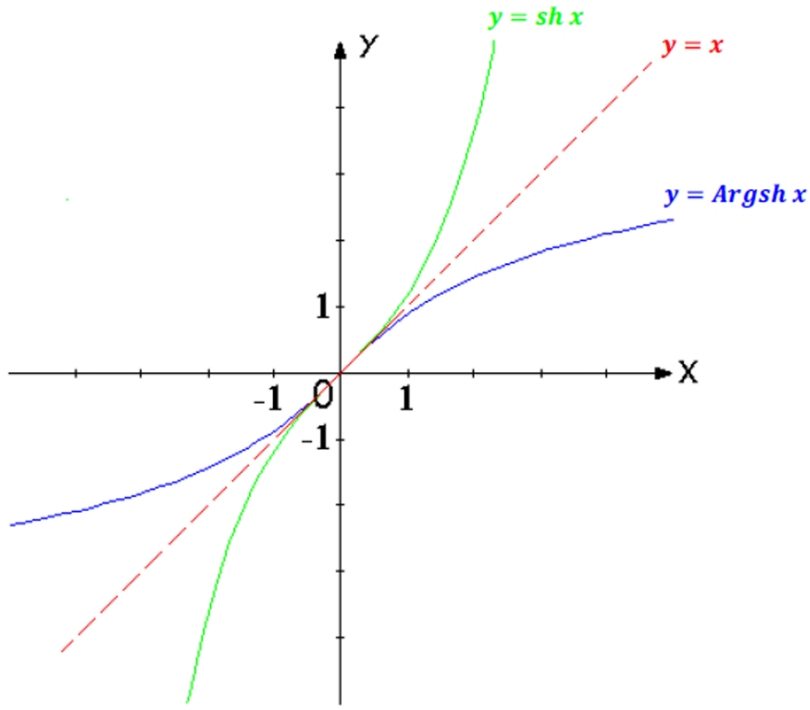
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ ch(argsh(x)) = \sqrt{x^2+1}$

6. $\forall x \in \mathbb{R},\ th(argsh(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ coth(argsh(x)) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8. $argsh(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ et $x = sh(y)$.

x	0		$+\infty$
$Argsh'(x)$	1	$+$	0^+
Argsh(x)	0	$\nearrow$	$+\infty$



Fonction argument cosinus hyperbolique

Définition 9.42 *La fonction $x \mapsto ch(x)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Alors la restriction de ch sur $[0; +\infty[$ réalise une bijection de*

$$[0; +\infty[\text{ sur } ch([0; +\infty[) = [1; +\infty[$$

. On appelle fonction argument cosinus hyperbolique et on note argch, la bijection réciproque de la restriction de la fonction cosinus hyperbolique sur $[0; +\infty[$. On a :

$$ch : [0; +\infty[\to [1; +\infty[\text{ et } argch : [1; +\infty[\to [0; +\infty[$$

avec la relation

$$y = argch(x) \Leftrightarrow y \in [0; +\infty[\text{ et } x = ch(y).$$

Propriété 9.43 1. *La fonction argch n'est ni paire ni impaire et est définie sur $[1; +\infty[$*

2. *La fonction argch est dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a :*

$$\forall x \in]1; +\infty[, \ argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{-1 + x^2}}.$$

3. *Si U est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\forall x \in I, U(x) > 1$, alors la composée $argch \circ U$ est dérivable sur I et on a :*

$$\forall x \in I, \ (argch \circ U)'(x) = \frac{U'(x)}{\sqrt{-1 + (U(x))^2}}.$$

4. $\forall x \in [1; +\infty[,\ ch(argch(x)) = x$

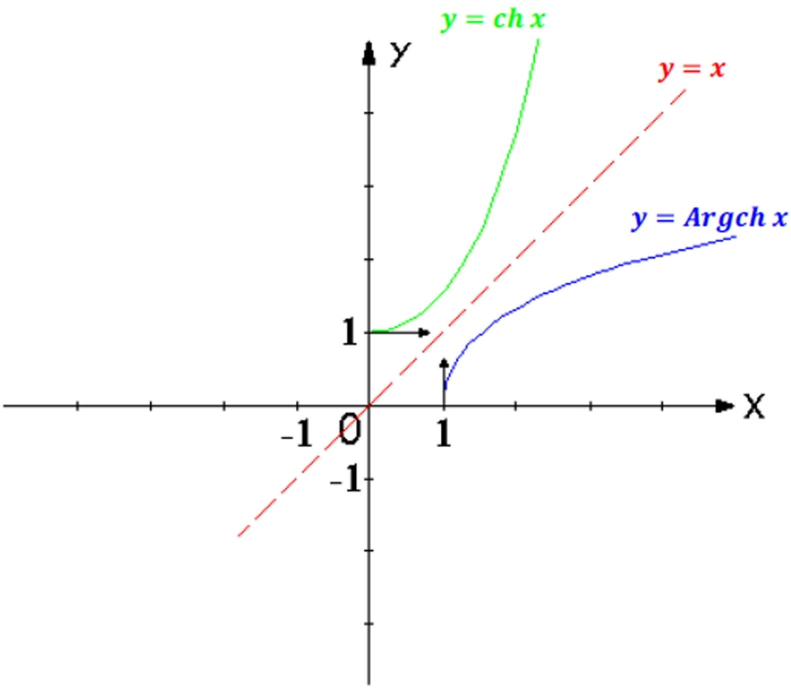
5. $\forall x \in [1; +\infty[,\ sh(argch(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$

6. $\forall x \in [1; +\infty[,\ th(argch(x)) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

7. $\forall x \in]1; +\infty[,\ coth(argch(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

8. $argch(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; +\infty[\\ y \in [0; +\infty[\end{cases}$ $et\ x = sh(y).$

x	1		$+\infty$
$Argch'(x)$	$+\infty$	$+$	0^+
Argch(x)	0	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 9.44 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = argch\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*

2. *Déterminer la dérivée première de f.*

Fonction argument tangente hyperbolique

Définition 9.45 *La fonction $x \mapsto th(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. Sa bijection réciproque est appelée fonction argument tangente hyperbolique et est notée argth. On a :*

$$y = argth(x) \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \text{ et } x = th(y).$$

Propriété 9.46 1. *La fonction argth est impaire et est définie sur $]-1,1[$*

2. *La fonction argth est dérivable sur $]-1;1[$ et on a :*

$$\forall x \in]-1;1[,\ argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

3. *Si U est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\forall x \in I, -1 < U(x) < 1$, alors la composée $argth \circ U$ est dérivable sur I et on a :*

$$\forall x \in I,\ (argth \circ U)'(x) = \frac{U'(x)}{1-(U(x))^2}.$$

4. $\forall x \in]-1;1[,\ th(argth(x)) = x$

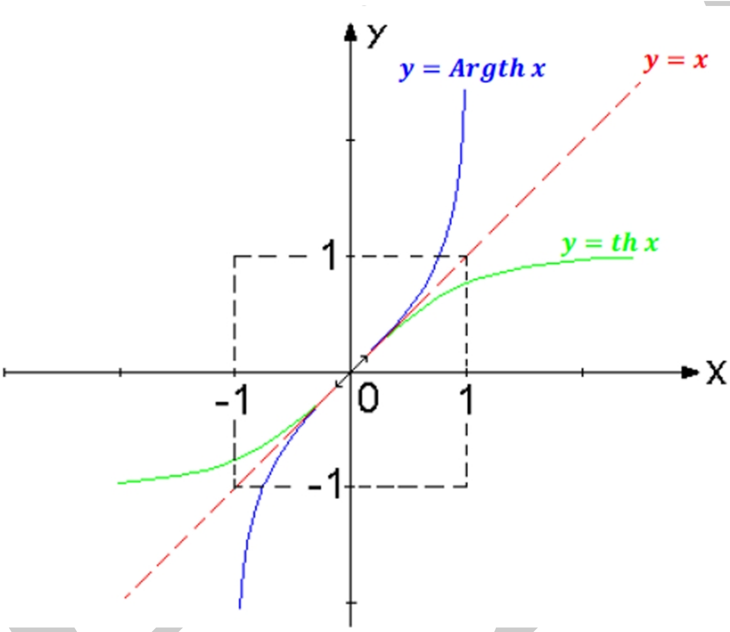
5. $\forall x \in]-1;1[,\ sh(argth(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\forall x \in]-1;1[,\ ch(argth(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\forall x \in]-1;0[\bigcup]0;1[,\ coth(argch(x)) = \frac{1}{x}$

8. $argth(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-1;1[\\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

x	0		1
$Argth'(x)$	1	$+$	$+\infty$
$Argth(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Fonction argument cotangente hyperbolique

Définition 9.47 *La fonction coth : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $coth(\mathbb{R}^*) =]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[$. La fonction coth admet p ar conséquent une réciproque appelée fonction argument cotangente hyperbolique notée argcoth telle que :*

$$argcth\ :]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[\to \mathbb{R}^*.$$

Propriété 9.48 1. *La fonction argcoth est impaire et est définie sur $]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[[$*

2. *La fonction argcoth est dérivable sur $]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[$ et on a :*

$$\forall x \in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[,\ argcoth'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. *Si U est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\forall x \in I, \mid U(x) \mid > 1$, alors la composée $argcoth \circ U$ est dérivable sur I et on a :*

$$\forall x \in I,\ (argcoth \circ U)'(x) = \frac{U'(x)}{1-(U(x))^2}.$$

4. $\forall x \in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[[,\ th(argth(x)) = x$

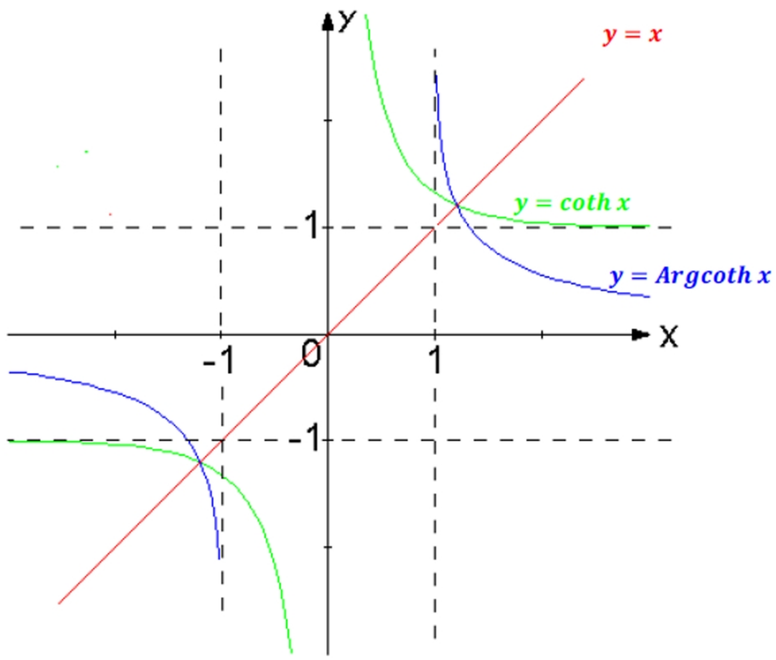
5. $\forall x \in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[,\ sh(argcoth(x)) = \frac{|x|}{x\sqrt{-1+x^2}}$

6. $\forall x \in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[,\ ch(argcoth(x)) = \frac{|x|}{\sqrt{-1+x^2}}$

7. $\forall x \in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[,\ th(argcoth(x)) = \frac{1}{x}$

8. $argcoth(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[\\ y \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$

x	1		$+\infty$
$Argcoth'(x)$	$-\infty$	$-$	0^-
$Argcoth(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0



Exercice 9.49 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = argcoth\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Déterminer la dérivée première de f.*

9.5.3 Expressions logarithmique

Expressions logarithmique de argch

Posons: $x = ch(y)$.

$$ch(x) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y + e^{-y}.$$

or

$$2x = e^y + e^{-y} \Leftrightarrow e^{2y - 2xe^y + 1 = 0}$$

donc cette équation devient $u^2 - 2xu + 1 = 0$ en posant $u = e^y > 0$. Le discriminant réduit donne $\Delta = b^2 - ac = (-x)^2 - (1)(1) = x^2 - 1$. Ainsi on a

$$u_1 = x - \sqrt{(x^2-1)}\ etu_2 = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Puisque $u > 0$ alors

$$u = x + \sqrt{x^2-1} = e^y \Rightarrow y = ln(x + \sqrt{x^2-1}) = argch(x).$$

D'où

$$argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ \forall x \in [1, +\infty[.$$

Expressions logarithmique de argsh

Posons: $x = sh(y)$.

$$sh(x) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y}.$$

or

$$2x = e^y - e^{-y} \Leftrightarrow e^{2y - 2xe^y - 1 = 0}$$

donc cette équation devient $u^2 - 2xu - 1 = 0$ en posant $u = e^y > 0$. Le discriminant réduit donne $\Delta = b^2 - ac = (-x)^2 - (1)(-1) = x^2 + 1$. Ainsi on a

$$u_1 = x - \sqrt{(x^2+1)}\ etu_2 = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Puisque $u > 0$ alors

$$u = x + \sqrt{x^2+1} = e^y \Rightarrow y = ln(x + \sqrt{x^2+1}) = argsh(x).$$

D'où

$$argsh(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Expressions logarithmique de argth

Posons: $x = th(y)$.

$$x = th(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow x = \frac{e^y - \frac{1}{e^y}}{e^y + \frac{1}{e^y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

Donc on a :

$$x(e^{éx} + 1) = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow 2y = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

soit

$$y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Or $x = th(y) \Leftrightarrow y = argth(x)$ donc

$$argth(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall x \in]-1, 1[]$$

Expressions logarithmique de argcoth

$$argcoth(x) = argth(\frac{1}{x}) \Rightarrow argcoth(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

D'où

$$argcoth(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

9.5.4 Développement limités des fonctions usuelles :

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0 et existent à n'importe quel ordre.

$$arcsin(x) = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2p)} \cdot \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \circ(x^{2p+2})$$

$$arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \circ(x^6)$$

$$arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \circ(x^{2p+2})$$

$$sh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \circ(x^{2p+2})$$

$$ch(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \circ(x^{2p+2})$$

$$argsh(x) = x - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \cdots + (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2p)} \cdot \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \circ(x^{2p+2})$$

$$argth(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \circ(x^{2p+2})$$

9.6 Fonction équivalente

Théorème 9.50

1. *Deux fonctions f et g qui ont la même dérivée sur un intervalle I ont une différence constante c sur cet intervalle. Si de plus, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ alors $c = 0$ et $f(x) = g(x)$.*

2. *Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x.*

   (a) *$f(x)$ est dit infiniment petit au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.*

   (b) *$f(x)$ est dit infiniment grand au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.*

3. *f et g sont deux fonctions définies dans le voisinage de a. On dit que f est équivalente à g lorsque x tend vers a et on note*

$$f\ x \overset{\sim}{\to} a\ g \text{ ou } f\ \tilde{a}\ g$$

si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ pour } g(x) \neq 0.$$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

4. $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} h \\ g \underset{a}{\sim} \phi \end{cases} \Rightarrow fg \underset{a}{\sim} h\phi$

5. $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow f^n \underset{a}{\sim} g^n.$

6. $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$

7. $e^f \underset{a}{\sim} e^g \Rightarrow f - g \underset{a}{\sim} 0$

8. *On dit que f est négligeable devant g lorsque x tend vers a et l'on note*

$$f \underset{a}{=} \circ(g)$$

si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \textit{ pour } g(x) \neq 0.$$

Théorème 9.51 *Tout polynôme non nul est équivalent, en $+\infty$ et en $-\infty$, à son terme de plus haut degré.*

Exemple 9.52

$$x^3 - 3x + 15 \underset{+\infty}{\sim} x^3$$

Théorème 9.53 *Tout polynôme non nul est équivalent, en 0, à son terme de plus petit degré.*

Exemple 9.54

$$x^3 - 3x^2 + 15x \underset{0}{\sim} 15x$$

Théorème 9.55 *Toute fraction rationnelle non nulle est équivalent, en $+\infty$ et en $-\infty$, au quotient de ses termes de plus haut degré.*

Exemple 9.56

$$\frac{x^3 - x}{x^4 + x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Théorème 9.57 *Toute fraction rationnelle non nulle est équivalent, en 0, au quotient de ses termes de plus bas degré.*

Exemple 9.58

$$\frac{2x^4 - x^2 + x}{x^2 + x - 1} \underset{0}{\sim} -x.$$

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Chapitre Dix

Calcul intégral

10.1 Primitives

Etant donnée une fonction f dérivable sur un intervalle non vide I, on sait déterminer sa fonction dérivée f'. L'opération que nous effectuons ainsi s'appelle la dérivation. Maintenant, on se pose les questions suivantes :

1. étant donnée une fonction f définie sur une intervalle I, peut-on trouver une fonction F définie, continue et dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F?
2. quelles sont les conditions d'existence d'une telle fonction F ?
3. combien y a-t-il de fonctions vérifiant la même propriété que F?

Dans cette section, nous abordons toutes ces questions pour découvrir la notion de primitive d'une fonction.

10.1.1 Les fonctions primitive

Définition 10.1 *Soient F et f deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 10.2 *Justifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ avec :*

$$F(x) = \frac{2}{25}x^5 + x^2 - 25x - \frac{23}{75} \text{ et } f(x) = \frac{2}{5}x^4 + 2x - 25.$$

Rappelons que sur un intervalle, une primitive d'une fonction continue existe et est unique à une constante près. Introduisons la notation fort commode suivante

Notations 10.3 *L'écriture $\int f(t)dt$ désignera une primitive de la fonction f. On a donc*

$$\int f(t)dt = F(t) + c, \text{ c est une constante.}$$

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

10.1.2 Formulaires de primitives usuelles

On récupère les formules de dérivées des chapitres antérieurs et on les inverse. On obtient les formulaires de primitives ci-dessous.

fonctions puissances

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaires
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$+c	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$ln(\mid x \mid)$+c	$]-\infty, 0[$ *ou* $]0, +\infty[$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ +c	$\mathbb{R}^*_-$ ou $\mathbb{R}^*_+$	$n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ +c	$]0, +\infty[$	
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ +c	$]0, +\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Fonctions exponentielles; trigonométrie circulaire; trigonométriques réciproques; hyperbolique,etc.

Dans cette partie, c désigne une constante réelle.

1. $$\int \frac{1}{x}dx = ln \mid x \mid +c; \int \frac{U'(x)}{U(x)}dx = ln \mid U(x) \mid +c$$

2. $$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x) + c; \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + c$$

3. $$\int e^x dx = e^x + c; \int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c; \int sinxdx = -cos(x) + c$$

4. $$\int cos(x)dx = sin(x) + c; \int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tan(x) + c; \int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cotan(x) + c$$

5. $$\int \frac{1}{sin(x)}dx = ln \mid tan(\frac{x}{2}) \mid +c; \int \frac{1}{cos(x)}dx = ln \mid tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \mid +c;$$

6. $$\int tan(x)dx = -ln(\mid cos(x) \mid +c; \int cotan(x)dx = -ln(\mid sin(x) \mid +c$$

7. $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin(\frac{x}{a}) + c; \int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + c$$

8.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+-\lambda}}dx = ln \mid x+\sqrt{x^2+-\lambda} \mid +c; \ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c$$

9.

$$\int \frac{1}{sh^2}dx = -coth(x)+c; \ \int \frac{1}{ch^2}dx = th(x)+c; \ \int ch(x)dx = sh(x)+c$$

10.

$$\int sh(x)dx = ch(x)+c; \ \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln \mid \frac{x-a}{x+a} \mid +c;$$

11.

$$\int \frac{1}{-x^2+a^2}dx = \frac{1}{2a}ln \mid \frac{x+a}{x-a} \mid +c;$$

12.

$$\int \frac{1}{ch(x)} = 2arctan(e^x)+c \ ou \ 2arctanth(\frac{x}{2}) = arctansh(x)+c$$

13.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = argch(x)+c; \ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = argsh(x)+c;$$

14.

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = argth(x)+c = \frac{1}{2ln \mid \frac{1+x}{1-x} \mid}+c$$

15.

$$\int \frac{U'(x)}{(U(x))^n}dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(U(x))^{n-1}}+c$$

16.

$$\int \frac{1}{(x-a)^2}dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+c, \ avec\, n>1$$

Exercice 10.4 *Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré (on admettra que les fonctions considérées sont définies et continues sur I).*

1. $f_1(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$.

2. $f_2(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $I =]0;2[$.

3. $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}_-^*$.

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

10.2 Les intégrales simples

10.2.1 Intégrales définies

Définition 10.5 *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle K contenant les Réels a et b.*

Si F est une primitive de f sur K. On définit l'intégrale de f entre a et b comme étant le nombre réel $F(b) - f(a)$ et on note

$$\int_a^b f(x)dx$$

et on lit "somme ou intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Notations 10.6

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \mid_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remark 10.2.1 *1. l'intégral de f entre a et b est un nombre réel.*

2. Ce nombre ne dépend pas de la primitive choisie pour f

3. l'élément "dx" que l'on retrouve dans l'expression de l'intégrale signifie que l'on prend la primitive (c'est-à dire que l'on "intègre")

Propriété 10.7 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.*

1. $\forall a \in I$ *et* $\forall b \in I$
   * $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
   * $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\forall a \in I$ *et* $\forall b, c \in I$
   $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ *(relation de Chasles)*

3. $\forall a \in I$; $\forall b \in I$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$
   * $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
   * $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Formule d'intégration par parties

f *et* g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle [a;b]. Si les fonctions dérivables f' *et* g' sont continues sur [a;b] alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x), g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Exercice 10.8 *Déterminer les intégrales suivantes :*

$$\int_{e}^{e^{-2}} ln(x)dx \quad et \quad \int_{0}^{1} xe^{x}dx.$$

Exercice 10.9 *Calculer*

$$I = \int Arctan(x)dx$$

Posons

$$u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$$

$$v(x) = Arctan(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$I = xArctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xArctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = xArctan(x) - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Intégrale des fonctions particulières

1. Si f est une fonction paire et continue sur un intervalle contenant les nombres réels 0 et a alors
   * $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$
   * $\int_{-a}^{-a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
2. Si f est une fonction impaire et continue sur un intervalle contenant les nombres réels 0 et a alors
   * $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$
   * $\int_{-a}^{-a} f(x)dx = 0$
3. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors pour tout élément a de $\mathbb{T}$
   * $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

La formule de changement de variable

On va apprendre à changer de variable dans une intégrale. La mentalité générale est la même que pour une intégration par parties : transformer le problème du calcul d'une intégrale en le problème du calcul d'une autre intégrale plus simple

Théorème 10.10 *Soit ϕ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ϕ « est » le changement de variables). Soit f une fonction continue sur $\phi(I)$ à valeurs dans R. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Exercice 10.11 *Calculer :*

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx$$

Résultats

Posons :

$$\sqrt{x^3+5} = t \Rightarrow x^3+5 = t^2 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt \Rightarrow x^2dx = \frac{2}{3}tdt.$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx = \int_0^1 \sqrt{x^3+5}(x^2dx) = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} t\cdot\frac{2}{3}.tdt = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{6}} t^2dt = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}}$$

Inégalité, moyenne et inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Si f est positive sur I alors on a : $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ $(a \leq b)$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2. Si f est négative sur I alors on a : $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ $(a \leq b)$, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

3. Si $f \geq g$ sur I alors on a : $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ $(a \leq b)$, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

4. $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ $(a \leq b)$, $\mid \int_a^b f(x)dx \mid\leq \int_a^b \mid f(x) \mid dx$

5. S'il existe un nombre réel M tel qu'on ait pour tout $\forall x \in [a;b]$ et $\forall b \in I$ $(a \leq b)$, $\mid f(x) \mid\leq M$ alors $\int_a^b \mid f(x) \mid dx \leq M \mid b-a \mid$.

6. Soit f une fonction Continue sur un intervalle $[a,b]$, m et M deux nombre réels.
   * Si pour tout élément x de $[a;b]$,$m \leq f(x) \leq M$ alors $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$ (inégalité de la moyenne).
   * Il existe au moins un nombre réel C de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(C) = \int_a^b f(x)dx$. Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé la moyenne de f sur $[a;b]$.

Exercice 10.12 *1. Calculer la moyenne de $f(x) = Arctan(x)$ sur l'intervalle $[1;2]$.*

2. Calculer la moyenne de $f(x) = ln(x)$ sur l'intervalle $[e;e^2]$.

10.2.2 Quelques situations usuelles

Intégrale du type $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \;\; a \neq 0$

Considérons la fonction $f \, : \, x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c} \; a \neq 0$. On se donne trois réels a, b et c tels que $a \neq 0$. On cherche les primitives de la fonction f. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ s'annule en au plus deux réels distincts. Si I est un intervalle sur lequel ce trinôme ne s'annule pas, la fonction f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

$$1^{er} Cas \, : \, \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]} = \frac{1}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]}$$

La fonction f est donc du type $x \mapsto \frac{\lambda}{(x+\alpha)^2+\beta 2}$ avec $(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\beta} arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + C.$$

$$2^{eme} cas \, : \, \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Alors sur $I =]-\infty, -\frac{b}{2a}[$ ou $]-\frac{b}{2a}, +\infty[$, les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)} + c.$$

$$2^{eme} cas \, : \, \Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Le trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. Pour tout réel x distinct de x_1 et x_2, on a

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\left[x_1 - x_2\right]}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right).$$

Sur tout intervalle ne contenant pas x_1 et x_2, les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{a(x_1-x_2)} \ln\frac{x-x_1}{x-x_2} + c.$$

Remark 10.2.2 *Notons que :*

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

1.

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+k^2}dx = \frac{1}{ka}Arctan(\frac{x}{k}) + c,\ avec\ a \neq 0$$

2.

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2-k^2}dx = \frac{1}{2ka}ln\left|\frac{x-k}{x+k}\right| + c,\ avec\ a \neq 0$$

Exercice 10.13 *Calculer*

$$I = \int \frac{1}{x^2+-x+25}dx$$

Résultats

$$I = \int \frac{1}{(x+3)^3+16}dx$$

Posons $t = x+3$ alors $dt = dx$

$$I = \int \frac{1}{t^2+16}dt = \frac{1}{4}Arctan(\frac{t}{4}) + c$$

Donc

$$I = \frac{1}{4}Arctan(\frac{x+3}{4}) + c$$

Intégrale du type $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$

On le calcule comme suit :

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \int \left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c}\right)dx + \frac{a}{c}\int dx$$

Exercice 10.14 *Calculer*

$$I = \int \frac{3x+2}{4x+1}dx$$

Résultat

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(\frac{3x+2}{4x+1}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)dx\\
&= \int\left(\frac{3x+2}{4x+1}-\frac{3}{4}\right)dx+\int\frac{3}{4}dx\\
&= \int\left(\frac{3x+2-\frac{3}{4}(4x+1)}{4x+1}-\frac{3}{4}\right)dx+\int\frac{3}{4}dx\\
&= \frac{5}{4}\int\frac{1}{4x+1}dx+\frac{3}{4}\int dx\\
&= \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\int\frac{4}{4x+1}dx+\frac{3}{4}\int dx\\
&= \frac{5}{16}ln\Big|4x+1\Big|+\frac{3}{4}x+c \text{ avec } c\in\mathbb{R}. \qquad (10.1)
\end{aligned}$$

Intégration des fonctions rationnelles : Intégrale du type $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *avec* $Q(x)\neq 0$

1. si le degré de p est supérieur à celui de Q, on écrit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ où $M(x)$ est un polynôme et $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle (degré de P_1 inférieur à celui de Q).

2. Décomposer le dénominateur de la fraction en facteur linéaires et quadratiques :

$$Q(x)=(x-a)^m\cdots(x^2+px+q)^n \text{ avec } p^2-4q<0$$

3. Calculer les coefficients indéterminés $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m,\cdots,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\cdots,B_n,\ C_n,\cdots,$ tels que :
$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_m}{x-a}+\cdots\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\cdots$

Exercice 10.15 *Calculer*

$$I=\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$$

Résultat

Chacun des binômes $(x-1)$, $(x-2)$ et $(x-4)$ entre dans la décomposition du dénominateur au premier degré, la fraction rationnelle propre donnée peut être représentée par une somme d'élément simples :

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$$

Par identification, on obtient

$$A = 3,\ B = -7\ et\ C = 5$$

et donc

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{7}{x-4}$$

$$I = 3ln\Big|x-1\Big| - 7ln\Big|x-2\Big| + 5ln\Big|x-4\Big| + c.$$

Exercice 10.16 *Calculer*

$$J = \int \frac{}{x^5 - x^2} dx$$

Résultat

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1)$$

alors

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

Les racines réelles du dénominateurs sont :0 et 1. Pour $x = 0$, on a $A = -1$ et pour $x = 1$ on a $c = \frac{1}{3}$.

par identification, on trouve :

$$A = -1,\ B = 0, c = \frac{1}{3} D = -\frac{1}{3}\ et\ E = \frac{1}{3}$$

Donc

$$J = -\int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{3(x-1)}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$J = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}ln\Big|x-1\Big| - \frac{1}{6}ln\Big|x^2+x+1\Big|$$

Intégrale du type $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}N_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

En posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n}$ et en faisant une intégration par partie, on obtient

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}.$$

Remark 10.2.3 *En appliquant cette formule $n-1$ fois, on ramène l'intégrale In à une intégrale du type*

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx.$$

Intégrale du type $I_n = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$I_n = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$I_n = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})]^n}dx$$

En posant $t = x+\frac{p}{2}$ et $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$, on obtient donc :

$$I_n = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{[(t)^2+(a)^2]^n}dt$$

Intégrale du type $I_n = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$

On détermine le dénominateur commun k des fractions $\frac{m}{n}, \cdots, \frac{r}{s}$ et utilise la méthode de changement de variable en posant

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

Exercice 10.17 *Calculer*

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt{2x+1}}$$

Résultats

$$I = \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{1}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ici, $PPCM(3;2) = 6$. Posons alors $2x+1 = t^6$ donc

$$x = \frac{1}{2}(t^6-1) \;\; et \;\; dx = 3t^5dt$$

$$I = \int \frac{3t^5}{t^2 - t^3}dt = 3\int \frac{t^3}{1-t}dt = 3\int -t^2 - t - 11 + \frac{1}{1-t}dt$$
$$I = 3\left(-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t + ln|1-t| + C\right)$$

On remplace t par

$$\sqrt[6]{2x+1}$$

pour obtenir la I.

Intégrale du type $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ où m, n et p sont des nombres rationnels

On distingue trois cas :

$$1^{er} cas : p \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas, le changement de variables $x = t^s$ où s est le PPCM des dénominateurs des fractions m et n, ramène l'intégrale proposée à une intégrale d'une fraction rationnelle.

$$2^{em} cas \ : \ \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$$

Ici le changement de variables $a + bx^n = t^s$, ramène l'intégrale en question à une intégration d'une rationnelle, s est le dénominateur de la fraction p.

$$3^{em} cas \ : \ \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas, on pose $ax^{-n} + b = t^s$ où s est le dénominateur de la fraction p.

Exercice 10.18 *Calculer*

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = \int x^{-4}\left(x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}} dx$$

Résultats

Ici,

$$m = -4,\ n = 2,\ p = -\frac{1}{2}\,et\,\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

est un nombre entier. Par conséquent, on pose

$$x^{-2} + 1 = t^2$$

alors

$$-2x^{-2}dx = 2tdt,\ x^{-3dx=-tdt.}$$

On a alors ::

$$I = \int x^{(4)}\left(x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}} dx = \int x^{(4)}\left[x^2\left(x^{-2}+1\right)\right]^{\frac{-1}{2}} dx = \int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{\frac{-1}{2}} x^{-3}dx$$

Par conséquent

$$I = -\int \left(t^2-1\right)t^{-1}tdt = -\int\left(t^2-1\right)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{\sqrt{\left(x^{-2}+1\right)^3}}{3} + C$$

$$I = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\left(1+x^2\right)^3}{3x^3} + C = \frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$$

10.3 Application des intégrales définies

10.3.1 Application au calcule d'aire

1. Soit f une fonction continue sue [a,b] $(a < b)$ tel que $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ alors le plan étant muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$; la partie (D) du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$; $x = b$ a pour aire:

$$\mathcal{A} = [\int_a^b f(x)dx]Ua$$

avec $Ua = \| \overrightarrow{i} \| . \| \overrightarrow{j} \|$.

On note que (D) est aussi l'ensemble des point M tel que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

2. Soit f une fonction continue sue [a,b] $(a < b)$ tel que $f(x) \leq 0\ \forall x \in [a,b]$ alors le plan étant muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$; la partie (D) du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$; $x = b$ a pour aire:

$$\mathcal{A} = [-\int_a^b f(x)dx]Ua$$

avec $Ua = \| \overrightarrow{i} \| . \| \overrightarrow{j} \|$

Remarque: (D) est aussi l'ensemble des point M tel que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$.

3. f *et* g deux fonctions continue sur [a,b] $(a < b)$ tel que $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ alors le plan étant muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$; la partie (D) du plan limité par les courbes $\mathcal{C_F}$ et $\mathcal{C_G}$ représentative de f et g respectives , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$; $x = b$ a pour aire:

$$\mathcal{A} = [-\int_a^b f(x) - g(x)dx]Ua$$

avec $Ua = \parallel \overrightarrow{i} \parallel . \parallel \overrightarrow{j} \parallel$.

(D) est aussi l'ensemble des point M lel que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

Exercice 10.19 *Calculer l'aire de la partie du plan délimité par la courbe de la fonction définie par*

$$f(x) = 4x - x^2$$

et l'axe des abscisses. L'unité graphique est $2cm$ *sur l'axe des abscisses et* $1,5cm$ *sur l'axe des ordonnées .*

Résultats

L'équation caractéristique de l'axe des abscisses est $y = 0$ donc on forme le système

$$f(x) = 4x - x^2 \ et\ y = 0$$

On en déduit

$$4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0\ oux = 0$$

$$\forall x \in [0; 4], 4x - x^2 \geq 0$$

alors l'aire cherchée est :

$$A = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx \cdot 2 \cdot 1,5cm^2 = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] \cdot 2 \cdot 1,5cm^2 = 32cm^2.$$

10.3.2 Calcul de longueur

1. En cordonnées cartésiennes, si une courbe d'équation $y = f(x)$ est régulière sur le segment $[a, b]$ (c'est-à-dire que $x \mapsto f'(x)$est continue sur $[a, b]$) alors la longueur de l'axe correspondant de cette courbe se calcule par ::

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \cdot Ul$$

2. En cordonnées cartésiennes, si la courbe est donnée sous forme paramétrique $x = x(t)$ et $y = y(t)$ alors la longueur de l'arc de la courbe correspondante à la variation monotone du paramètre t entre t_1 et t_2 est exprimée par:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \cdot ul.$$

3. Si une courbe régulière est dérivée en coordonnées polaires par une équation de la forme $\rho = f(\theta)$ où $\alpha \leq \theta \leq \beta$, alors la longueur de l'arc est :

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta \cdot ul.$$

Exercice 10.20 *Calculer la longueur de l'arc de la courbe*

$$y^2 = x^3$$

compris entre $x = 0$ *et* $x = 1$, $y \geq 0$.

Résultats

$$\begin{aligned} y^2 = x^3 \quad &\Rightarrow \quad y = \sqrt{x^3},\, car\, y \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{3\sqrt{x^3}}{2x} \\ &\Rightarrow \quad y'' = \frac{9}{4}x \end{aligned} \tag{10.2}$$

alors

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx u.l} \\ &= \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{9}{4}\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx u.l \\ &= \frac{4}{9}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 \cdot u.l \end{aligned} \tag{10.3}$$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

$$\frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}-1\right]\cdot u.l$$

Exercice 10.21 *Calculer la longueur de la cycloïde d'équation :*

$$\begin{cases} x(t) = a\,(t - sin(t)) \\ y(t) = a\,(1 - cos(t)) \\ avec\ t \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

Résultats

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt \cdot U.l$$

$$L = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{[a\,(1 - cos(t))]^2 + [asin(t)]^2}dt \cdot U.l$$

$$L = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2\,[1 - 2cos(t) + cos^2(t) + sin^2(t)]}dt \cdot U.l$$

$$\begin{aligned} L &= a\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - cos(t)}dt \cdot U.l \\ &= 2a\int_{0}^{2\pi} sin(\frac{t}{2})dtdt \cdot U.l \\ &= 2a\left[-2cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \cdot U.l \end{aligned}$$

Exercice 10.22 *Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation*

$$\rho = sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

comprise entre

$$\theta = 0\ et\ \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Résultats

$$L = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d_\theta \cdot u.l$$

$$L = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sin^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)}d_\theta \cdot u.l$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)} d_\theta \cdot u.l \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d_\theta \cdot u.l \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right) d_\theta \cdot u.l \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2} sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
L &= \frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) \cdot u.l
\end{aligned} \tag{10.4}$$

10.3.3 Calcul de volume d'un corps de révolution

1. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

   On appelle unité de volume le produit des trois unités graphiques: $Uv = \| \overrightarrow{i} \| . \| \overrightarrow{j} \| . \| \overrightarrow{k} \|$

   Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux élément de I $(a <\leq b)$. Désignons par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dan le plan de repère $(0, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

   Le volume de la portion de l'espace engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine (P) limité par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations x=a et y=b est donné par la formule:

   $$V = [\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx] Uv$$

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

   On suppose que la section du domaine (D) de l'espace par un plan (P) parallèle à (xoy) d'équation: $(xoy) : z = 1$ à une aire $S(t)$ alors le volume du domaine (D) compris entre les plan d'équation $z = a$ $z = b$ est

   $$V(D) = [\int_a^b S(t) dt] Uv$$

   telle que $t \mapsto S(t)$ soit une fonction continue sur [a;b].

Exercice 10.23 *Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses (ox) de la figure limité par la courbe de la fonction*

$$f(x) = (x-1)^3$$

et les droites d'équations

$$x = 1 \ et \ x = 2.$$

Résultats

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^2 (f(x))^2\, dx \cdots u.v \\
&= \pi \int_1^2 (x-1)^3\, dx \cdots u.v \\
&= \pi \left[\frac{1}{4\,(x-1)^4} \right]_1^2 \cdots u.v \\
&= \frac{\pi}{4} \left[(2-1)^4 - 0 \right] \cdots u.v \\
&= \frac{\pi}{4} \cdots u.v
\end{aligned} \tag{10.5}$$

10.3.4 Formule de Taylor avec reste intégrale

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$.

1. On peut déjà écrire que :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

   En faisant une intégration par partie (on pose $u(t) = -x + t$ et $v(t) = f(t)$) on a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t) f^{(2)}(t)dt.$$

2. On montre par une méthode analogue que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(2)}(t)dt.$$

Plus généralement on a :

Propriété 10.24 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$. On a:*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)(a)} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

10.3.5 Méthode d'approximation numérique des intégrales

On connaît des fonctions qui permettent de calculer l'intégrale de quelques fonctions. Mais il y a relativement peu de fonctions dont on sait calculer l'intégrale . Par exemple, on sait calculer :

$$\int_0^1 sin(t)dt$$

mais on ne sait pas calculer

$$\int_0^1 \frac{sin(t)}{t}dt.$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{sin(t)}{t}$ prolongée par la valeur 1 en 0, est intégrale sur tout intervalle $[0, 1]$ (étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$).

Méthode des rectangles

Soit f une fonction monotone sur $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. On peut par exemple supposer que f est croissante sur $[a; b]$ (sinon on remplace f par $-f$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On considère une subdivision de l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de longure constante égale à

$$h = \frac{b-a}{n}$$

de la forme

$$[x_i; x_{i+1}];\ x_i = a + ih, i = 0, 1 \cdots, n\, avec,\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Puisque f est croissante sur chaque intervalle $x_k; x_{k+1}$, On a, pour $k = 0, 1, \cdots, n$

$$f\left[a + (k-1)\,h\right] \leq f(t) \leq f\left[a + kh\right], pour\ tout\ t \in \left[a + (k-1)\,h; a + kh\right]$$

Ce qui implique que

$$hf\left[a + (k-1)\,h\right] \leq \int_{a+(k-1)h}^{a+hh} f(t)dt \leq hf\left[a + hh\right]$$

Par sommation membre à membre, sur toute les valeurs de $k \in \{1, 2, \cdots n\}$, on obtient

$$S_1 = h\sum_{k=0}^{n-1} f\left[a + (k-1)\,h\right] \leq \int_a^b f(t)dt = I \leq h\sum_{k=0}^{n} f\left[a + kh\right] = S_2.$$

$$S_2 - S_1 = \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right],$$

$$0I - S_1 \leq S_2 - S_1$$

et

$$0 \leq S_2 - I \leq S_2 - S_1$$

La méthode des rectangles consiste à approcher l'intégrale I par une de ces deux sommes S_1 et S_2. Lorsque $S_2 - S_1$ est suffisamment petit, le réel S_1 est **la valeur approchée par défaut de** I et le réel S_2 **est la valeur approchée par excès** de I.

1. Si l'on remplace I par S_1, l'erreur commise est :

$$\epsilon = I - S_1 \geq 0 \textit{ et on a } 0 \leq \epsilon \leq S_2 - S_1$$

2. Si l'on remplace I par S_2, l'erreur commise est :

$$\epsilon = S_2 - I \geq 0 \textit{ et on a } 0 \leq \epsilon \leq S_2 - S_1$$

Il suffit donc en théorie de découper l'intervalle $[a; b]$ en de sous-intervalles suffisamment petits pour obtenir une erreur aussi petit que l'on veut.

Exercice 10.25 *Déterminer une valeur approchée à* 10^{-2} *près de l'intégrale*

$$I = \int_0^1 e^{t^2} dt$$

par la méthode des rectangles.

Résultats

On verra que , pour obtenir la valeur approchée de cette intégrale à 10^{-2} près, il faudrait prendre $n \geq 100(e-1)$ soit $n \geq 172$, ce qui exige la subdivision de l'intervalle $[0; 1]$ en au moins 172 intervalles de même amplitude c'est-à-dire le calcul de la fonction et en au moins 172 points.

Ceci montre que cette méthode n'est pas efficace.

Méthode des trapèzes

Soit f une fonction monotone sur $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$, On considère une subdivision de l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{et } x_i = a + ih \text{ avec}$$

$$i = 0, 1 \cdots, n\, avec,\ h = \frac{b-a}{n}.$$

On remplace la fonction f sur l'intervalle $[a + (k-1)h; a + kh]$ par une fonction affine prenant les mêmes faveurs que f aux points $x_{k-1} = a + (k-1)h$ et $x_k = a + kh$, c'est-à-dire on définit une fonction affine g_k dans l'intervalle $[x_{k-1}; x_k]$ telle que

$$g(x_{k-1}) = f(x_{k-1})\ et\ g(x_k) = f(x_k)$$

$$g_k(t) = \frac{1}{h}(x_k - t)f(x_{k-1}) + (t - x_{k-1})f(x_k) = (k - x_{k-1})\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} + f(x_{k-1})$$

On a

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} g_k(t)dt = \frac{h}{2}\left[f(a + (k-1)h) + f(a + kh)\right].$$

On fait l'approximation de l'intégrale

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(t)dt \quad par \quad \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} g_k(t)dt$$

qui est l'aire du trapèze. La méthode des trapèzes consiste donc à approcher

$$I = \int_a^b f(t)dt$$

par la somme des aires de trapèze pour $k = 1, 2 \cdots, n$, c'est-à-dire

$$S_n = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(a + (k-1)h\right) + f\left(a + kh\right)\right] = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right]$$

S_n peut être rendu aussi proche que l'on désire de I pourvu que le pas h soit choisit aussi petit que l'on veut et que la fonction f soit assez régulière. l'erreur commise dans cette approximation est

$$\epsilon = \left|S_n - I\right|$$

Propriété 10.26 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[c; d]$, deux fois dérivables sur ce intervalles sur ce intervalle et telle qu'il existe deux constantes réelles m et M telles que*

$$\forall t \in [c; d], m \leq f^{(2)} \leq M.$$

Alors on a :

$$\frac{m(d-c)^3}{12} \leq \left(\frac{d(c)}{2}\right)\left(f(c) + f(d) - \int_c^d f(t)dt\right) \leq \frac{M(d-c)^3}{12}$$

Propriété 10.27 *Soit $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur $[a;b]$ telle qu'il existe deux constantes réelles m et M telles que $\forall t \in [a;b], m \leq f^{(2)} \leq M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\frac{m(b-a)^3}{12} \leq S_n - \int_a^b f(t)dt \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$$

avec

$$S_n = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right]$$

Exercice 10.28 *Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale*

$$I = \int_0^1 e^{t^2} dt$$

par la méthode des trapèzes.

Résultats

Soit $f(t) = e^{t^2}$. On montre que $\forall t \in [0;1]$ on a $2 \leq f(t) \leq 6e \leq 17$ et qu'il suffit de prendre $n \geq 12$ pour obtenir une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

10.4 Les intégrales généralisées ou intégrales impropres

On parle d'intégrale généralisée ou impropre dans le cas où : soit la fonction devient infinie sur l'intervalle d'intégration , soit l'intervalle d'intégration est de longueur infinie.

Définition 10.29 *On appelle intégrale généralisée ou intégrale impropre :*

1. *les intégrales à bornes infinies;*
2. *les intégrales des fonctions non bornées.*

10.4.1 Cas où l'intervalle d'intégration est de longueur infinie

Définition 10.30

1. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, posons*

$$I_{f(x)} = \int_a^x f(t)dt.$$

On a, par définition :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} I_{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Si la limite existe et et finie, on dira que l'intervalle est convergente. Dans le cas contraire, elle est dite divergente.

2. *De même, si f est continue sur $]-\infty; b]$, on posera*

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)ft = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f(t)dt.$$

3. *En fin, si f est continue sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, on posera*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$

Remark 10.4.1 *Etudier la nature d'une intégrale, c'est dire si elle-ci est convergente ou divergente.*

Exercice 10.31 1. *Calculer les intégrales*

$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx \text{ et } J = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx$$

2. *Etudie la convergence de :*

$$K = \int_{1}^{+\infty \frac{1}{x^t}} dx$$

Propriété 10.32 *Si f est continue sur $[a; +\infty[$ et b est tel que $a < b$. Les intégrales*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \text{ et } \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

sont de même nature et on a :

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

Propriété 10.33 1. *Si $0 \leq f \leq g$, on*

$$l'existence\ de \int_{a}^{+\infty} g(x)dx \Rightarrow l'exixtence\ de \int_{a}^{+\infty} f(x)dx;$$

$$non\ \ existence\ de \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow non\ exixtence\ de \int_{a}^{+\infty} g(x)dx.$$

2. *si f et g sont équivalentes quant x tend vers $+\infty$, alors*

$$\int_{a}^{+\infty} g(x)dx \text{ et } \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

sont de même nature.

10.4.2 Cas où la fonction devient infinie sur l'intervalle d'intégration

Définition 10.34 *1. Soit f une fonction continue sur*

$$[a,b[\text{ et } \lim_{x\to b^-} f(x) = -\text{ ou } + \infty$$

. Posons

$$I_{f(x)} = \int_a^x f(t)dt$$

On a par définition

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} I_{f(x)} = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

Si la limite existe et est finie, on dira que l'intégrale est convergente. Dans le cas contraire, elle est dite divergente.

2. De même, si f est continue sur $]a,b,$ on posera :

$$I = \int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

3. Enfin si f est continue sur $]a;b[$, et $c \in]a;b[$, on étudiera d'abord les intégrales

$$I_1 = \int_a^c f(t)dt \text{ et } I_2 = \int_c^b f(t)dt$$

(a) Si I_1 et I_2 convergent alors I converge et on a

$$I = I = \int_a^b f(t)dt = I_1 + I_2 = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

(b) Si I_1 converge et I_2 diverge alors I diverge

(c) Si I_2 converge et I_1 diverge alors I diverge

(d) Si I_1 et I_2 divergent dans le même sens alors I diverge

(e) Si I_1 et I_2 divergent dans le sens contraire alors on ne peut ruen conclure.

Définition 10.35 *Si la fonction f présente une discontinuité infinie au point c du segment $[a;b]$ et est continue pour*

$$a \leq x < c \text{ et } c < x \leq b,$$

alors, par définition,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\alpha\to c-\alpha} \int_a^b$$

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ (où $f(c) = \infty, a < c < b$)est convergente lorsque les deux limite existent et donnent des quantités finies au deuxième membre de l'égalité; elle est divergente si l'une l'une au moins des limites 'existe pas ou est infinie.

10.4.3 Les intégrales de Riemann

1. L'intégrale de Riemann
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$$
converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2. L'intégrale de Riemann
$$\int_0^1 \frac{+\infty}{t^\alpha} dt$$
converge si et seulement si $\alpha > 1$.

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Suites et séries numériques-séries entière

11.1 Suite numérique : rappels et compléments

On appelle suite numérique $(U_n)_{n\geq 0}$ toute suite de nombres réels ou complexes. On notera $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite ne commençant qu'à l'indice n_0. On notera alors plus simplement (U_n) la suite, à ne pas confondre avec U_n, qui est son terme de rang n.

11.1.1 Généralités

Définitions et propriétés

Soit $I \subset \mathbb{N}$. On appelle suite numérique toute application de I dans K qui à n on associe U_n.

$$I \longrightarrow K$$
$$n \longmapsto U_n$$

- Si $K = \mathbb{R}$, la suite est appelée suite réelle
- Si
- $K = \mathbb{C}$, la suite est appelée suite complexe
- U_n est appelé le terme général de la suite
- Une suite de terme général U_n pour $n \in \mathbb{R}$ est notée $(U_n)_{n\geq 0}$ ou (U_n).

Exercice 11.1 *Calculer les trois premiers termes de chacune des suites numériques* $(U_n)_{n\geq 0}$,

$(V_n)_{n\geq 5}$ *et* $(W_n)_{n>1}$ *définies par :* $U_n = 2^{n+1}$, $V_n = \frac{2}{n}$ *et*

$$\begin{cases} w_0 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ W_{n+1} = 1 + \frac{1}{W_n} \end{cases}$$

Définition 11.2 (Monotonie, Majoration, Minoration) *oit* (U_n) *une suite de réels. On dit que* (U_n) *est :*

1. *croissante (respectivement : strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si :* $\forall, n \geq 0$, $U_{n+1} \geq U_n$ *(respectivement :* $>, \leq, <$*).*

2. *monotone si elle est croissante ou décroissante.*

3. *stationnaire si elle constante à partir d'un certain indice.*

4. *majorée (respectivement minorée) s'il existe un réel* M *(respectivement* m*) tel que :* $\forall n \geq 0$, $U_n \leq M$ *(respectivement* $U_n \geq m$*).*

5. *bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire que la suite* $(|U_n|)$ *est majorée, i.e. il existe un réel* $M > 0$ *tel que :* $\forall n \geq 0$, $|U_n| \leq M$.

Remark 11.1.1 *Soit plus généralement* (U_n) *une suite de nombres complexes. Notons* $|Z| \in \mathbb{R}_+$ *le module de* Z*. On rappelle qu'on peut décomposer* Z *en partie réelle/partie imaginaire :* $= a+ib$*, avec* a *et* b *réels, auquel cas* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$*; ou bien décomposer* Z *en module/argument* $Z = re^{i\theta}$ *, avec* $r \geq 0$ *et* $\theta \in [0, 2\pi[$*, auquel cas* $|z| = r$*. Comme pour le cas d'une suite de réels, on dira que* (U_n) *est bornée si la suite* $(|U_n|)$ *des modules est majorée. En notant*

$$U_n = a_n + ib_n = r_n e^{i\theta_n}.$$

Exercice 11.3 *Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée*

1. $U_n = \frac{3n+sin(n)}{n^2}$

2. $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

Propriété 11.4 1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R}$ *alors* (U_n) *est convergente*

2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \infty$ *alors* (U_n) *est divergente*

3. *une suite décroissante et majorée par son premier terme*

4. *une suite croissante et minorée par son premier terme*

5. *une suite croissante et majorée admet nécessairement une limite. Il en est de même d'une suite décroissante et minorée*

6. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

7. ***Suite stationnaire:*** *On dit qu?une suite numérique* (U_n) *est stationnaire s'il existe* $n_0 \in I$ *tel que* $\forall n \geq n_0$, $U_{n+1} = U_n$.

8. ***Suite périodique:*** *On dit qu?une suite numérique* (U_n) *est périodique s'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n \in I$, $U_{n+p} = U_n$.

11.1.2 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est une méthode qui permet de démontrer qu?une assertion dépendante d'entiers naturels est vraie quelque soit l?entier naturel $n \geq N_0$ où $N_0 \in \mathbb{N}$. Nous avions plusieurs variantes du principe de ce raisonnement.

Théorème 11.5 (Principe : récurrence faible) *Soit* $P(n)$ *une proposition dépendant d'entiers naturels* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. *Si on a :*

(i) $P(n_0)$ *(initialisation);*

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ *choisi tel que* $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$ *(hérédité),*

alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *on a* $P(n)$.

Point de la méthode

Dans une démonstration par récurrence, procéder de la manière suivante

1. Exprimer clairement l?assertion $P(n)$ que l?on veut prouver Vraie pour tout entier naturel n avec $n \geq n_0$.

2. Vérifier que $P(n_0)$ est Vraie.

3. Faire l?hypothèse de récurrence : "$P(n)$ Vraie pour un entier naturel $n \geq n_0$.". Utiliser cette hypothèse pour prouver (par des calculs, des raisonnement, de l?intuition) que $P(n+1)$ est Vraie.

Exemple 11.6 *Prouver par récurrence que :*

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)((2n+1))}{6}$$

Exemple 11.7 *Montrer que pour tout entier naturel n, on a*

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple 11.8 *Soit ψ une application strictement croissante définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\psi(n) \geq n$.*

Exemple 11.9 *Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.*

Propriété 11.10 (Principe : récurrence forte) *Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une proposition dépendante d'entiers naturels $n \geq n_0$. Si on a*

(i) $P(n_0)$ (initialisation)

(ii) $\forall\, n \geq n_0,\ (P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n)) \implies P(n+1)$ (hérédité),

alors, $\forall\, n \geq n_0,\ P(n)$.

11.1.3 Opération sur les limites

Définition 11.11 *(Opérations sur les suites)*
Soient $(x_n)_{y_n \in I}$ et $(_n)_{n\in I}$ deux suites réelles. On définit :

1. *la suite $(x_n + y_n)$ de terme général $x_n + y_n$ est dite somme;*
2. *la suite (λy_n) de terme général λx_n est dite multiplication par un scalaire λx_n.*
3. *la suite $(x_n y_n)$ de terme général $x_n y_n$ est dit produit*
4. *la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ de terme général $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ si $y_n \neq 0, \forall n \in I$ est dite quotient.*

Propriété 11.12 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles convergentes respectivement vers $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.*

1. *Pour tout λ les suites (x_n+y_n), (λx_n) et $(x_n y_n)$ convergent et admettent pour limite $x+y$, λx et xy respectivement.*
2. *Si $y \neq 0$ alors la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ converge et admet pour limite $\dfrac{x}{y}$.*

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Théorème 11.13 *(Comparaison)*
Soient (x_n), (y_n) et (z_n) des suites réelles.

1. *Si il existe $N_0 \in I$ tel que, $\forall n > N_0, x_n \leq y_n$ et si (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y. Alors $x \leq y$.*

2. *Si il existe $N_0 \in I$ tel que $\forall n > N_0, x_n \leq y_n \leq z_n$ et si les suites $(x_n), (z_n)$ convergent vers la même limite, alors la suite (y_n) converge et*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n$$

.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles convergentes vers x et y respectivement. Supposons qu?il existe un rang $N_0 \in I$ tel que $\forall n > N_0, x_n \leq y_n$. Il s'agit de montrer que $x \leq y$.
   Raisonnons par l'absurde :
   supposons que $x > y$. Prenons $\epsilon = x - y > 0$, alors il existe $N_1 \in I$ et $N_2 \in I$ tels que $|x_n - x| < \epsilon/2, \forall\ n > N_1$ et $|y_n - y| < \epsilon/2,\ \forall n > N_2$. Ainsi,
   $\forall n > N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, on a :

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= (x_n - x) + (x - y) + (y - y_n) \\ &\geq -|x_n - x| + |x - y| - |y_n - y| \\ &> (x - y) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \\ &= (x - y) - \epsilon = 0 \end{aligned}$$

   On a donc $x_n > y_n$ pour tout $n > N$, ce qui est absurde.

2. A démontrer en exercice.

Remark 11.1.2 *Si les suites (x_n) et (y_n) convergent et s'il existe $N_0 \in I$ tel que $\forall n > N_0, x_n < y_n$, on ne peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.*
En effet en considérant les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = 0$ et $y_n = \frac{1}{n}$, on a $x_n = 0 < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

11.1.4 Les différents types de suites réelles

Suite arithmétique

Définition 11.14 *Une suite de nombre $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n + r \text{ avec } r : \text{la raison de la suite}$$

Exemple 11.15

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$$

Cette suite représente la suite des nombres impairs qui est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 1$.

Propriété 11.16 *Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique , alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } U_n = \frac{U_{n-1+U_{n+1}}}{2}$$

et de manière générale on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } U_n = \frac{U_{n-p+U_{n+p}}}{2}$$

Si U_0 est le premier terme d'une suite arithmétique et si on note r la raison de la suite, alors il existe une formule qui permet de calculer n'importe quel U_n en fonction de son indice n.

$$U_n = U_0 + nr$$

De manière générale, U_p est le premier terme alors

$$U_n = U_p + (n+p)r$$

Remark 11.1.3 *Une suite arithmétique n'est jamais convergente.*

Propriété 11.17 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0 alors la somme :*

$$\underbrace{U_0 + U_1 + U_3 + \cdots + U_n}$$

soit

$$S_n = (n+1)\frac{U_0 + U_n}{2}$$

De manière générale :

$$S_n = (\text{nombre de terme}) \cdot \frac{\text{Premier terme + Dernier terme}}{2}$$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Suite géométrique

Définition 11.18 *On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que*

$$U_{n+1} = q \cdot U_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Le nombre réel q est appelé raison de la suite géométrique.

Exemple 11.19 *La suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $U_n = 4^n$ est une suite géométrique.*

Propriété 11.20 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors pour tout entier n et p, nous avons*

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

Propriété 11.21 *Si n est un entier naturel et q un réel différent de 1, alors :*

1. $$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
2. *La somme S_n des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et premier terme U_0 est*
$$S_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
3. *La somme S_n des p premiers termes d'une suite géométrique de raison q et premier terme U_k est*
$$S_n = U_k \frac{1-q^p}{1-q}$$

Exemple 11.22

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} \ \ et \ \ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Propriété 11.23

1. *Une suite (U_n) à terme positifs est géométrique si et seulement si*
$$\forall n \in N, U_n\sqrt{U_{n-1}U_{n+1}}$$
.De manière générale
$$\forall n \in N, U_n\sqrt{U_{n-p\cdot U_{n+p}}}$$
2. *Une suite géométrique est convergente sis et seulement si $q < 1$ et dans ce cas elle a pour limite 0 (zéro). Si $|q| \geq 1$, alors la suite géométrique diverge.*

Suites arithmético-géométrique

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite récurrence (U_n) dont la définition est de la forme

$$\begin{cases} U_0 \text{donné} \\ U_{n+1} = aU_n + b \end{cases}$$

On décide de prendre $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sinon la suite sera arithmétique ou géométrique .

Une telle suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

La suite de cette suite est telle que

$$f(\ell) = \ell \Rightarrow a\ell + b = \ell \Rightarrow \ell = \frac{b}{1-a}$$

Suites adjacentes

Deux suite réelles (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si et seulement si :

$$\begin{cases} (U_n) \text{est croissante} \\ (V_n) \text{est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - U_n) = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, les deux suite admettent la même limite.

Suite récurrentes linéaires

une suite (U_n) est dite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe des réels a et b différents de 0 tels que :

$$U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n.$$

Pour cette suite, les deux premiers termes U_1 et U_2 sont connus et on a :

$$U_{n+2} - aU_{n+1} - bU_n = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation est

$$r^2 - ar - b = 0.$$

Pour cela, on calcule le discriminant

$$\Delta = a^2 + 4b :$$

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Il existe donc $(\alpha_1; \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$U_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Pour déterminer α_1 et α_2, on résout le système :

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 \\ U_2 = \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 \end{cases}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une racine réelle double

$$r_1 = r_2 = r_0 = \frac{a}{2}$$

Il existe donc $(\alpha_1; \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$U_n = (\alpha_1 n + \alpha_2)\, r_0^n$$

Pour déterminer α_1 et α_2, on résout le système :

$$\begin{cases} U_1 = (\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2)\, r_0^1 \\ U_2 = (\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2)\, r_0^2 \end{cases}$$

3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes z_1 et z_2 telles que

$$z_1 = \lambda e^{i\theta}\ et z_2 = \lambda e^{-i\theta}$$

Il existe donc $(\alpha_1; \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$U_n = \lambda^n \left(\alpha_1 Cos(n\theta) + \alpha_2 Sin(n\theta)\right)$$

Pour déterminer α_1 et α_2, on résout le système :

$$\begin{cases} U_1 = \lambda^1 \left(\alpha_1 Cos(1\theta) + \alpha_2 Sin(1\theta)\right) \\ U_2 = \lambda^2 \left(\alpha_1 Cos(2\theta) + \alpha_2 Sin(2\theta)\right) \end{cases}$$

Exercice 11.24 *Déterminer le terme général de la suite suivante :*

$$(V_n) = \begin{cases} V_0 = 1, \quad V_1 = 6 \\ \forall \not\Leftarrow \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = 4V_n - 4V_{n-1} \end{cases}$$

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Suites extraites

Définition 11.25 *1. Une suite (V_n) est dite extraite de la suite (U_n) s'il existe une application*

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

strictement croissante, telle que

$$V_n = U_{\phi(n)}.$$

On dit aussi que (V_n) est une sous suite de (U_n).

2. Si (U_n) converge vers α, alors toute sous suite converge aussi vers ℓ.

Remark 11.1.4 *1. si une suite extraite de (U_n) diverge, ou si deux suites extraites ont des limites différentes, alors (U_n) diverge.*

2. Si des suites extraites de (U_n) convergent toutes vers la même limite ℓ, alors on peut conclure que (U_n) converge vers ℓ si tout U_n est un terme d'une des suites extraites étudiés. Par exemple, si (U_{2n}) et U_{2n+1} convergent vers ℓ,alors (U_n) converge vers ℓ.

Définition 11.26 *(**Valeur d'adhérence d'une suite**) Soit (U_n) une suite réelle. On appelle valeur d'adhérence de la suite (U_n) la limite lorsqu'elle existe d'une sous-suite de (U_n).*

Exercice 11.27 *On considère la suite (U_n) de terme général*

$$U_n = (-1)^n + \frac{2n}{n+1}$$

. Les sous-suites

$$(Z_n) \text{ et } (W_n)$$

définies par

$$Z_n = U_{2n} \text{ et } W_n = U_{2n+1}$$

convergent respectivement vers 3 et 1. Donc 3 et 1 sont des valeurs d'adhérence de la suite (U_n).

Exemple 11.28 *On considère la suite (U_n) de terme général*

$$U_n = (-1)^n n^2 + \frac{2n}{n+1}$$

.

Montrons que cette suite n'a pas de valeur d'adhérence. En effet, soit $(\phi(n))$ *une suite strictement croissante dans* $\mathbb{N}^*$ *et soit* (W_n) *la suite définie par* $W_n = U_{\phi(n)}$. *Il s'agit de montrer que* (W_n) *ne converge pas i.e n'est pas bornée. Soit* $M > 0$, *cherchons* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour* $|W_{n_0}| > M$.

$$\left|(-1)^n n^2 + \frac{2n}{n+1}\right| > n^2 + \frac{2n}{n+1} > n^2$$

Ainsi, pour $n_0 > \sqrt{M}$, *on a* $|W_{n_0}| > M$ *par conséquent* (W_n) *n'est pas bornée par conséquent n'est pas convergente. On conclu que* (U_n) *n'a pas de valeur d'adhérence.*

Théorème 11.29 *Si la suite numérique* (U_n) *converge vers* $l \in \mathbb{R}$, *alors toute sous-suite* (U_{k_n}) *de* (U_n) *converge vers* l.

Supposons que la suite (U_n) converge vers l, $l \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $|U_n - l| < \epsilon$. Soit (U_{k_n}) une suite sous-suite de la suite (U_n). La suite (k_n) est alors strictement croissante. D'où, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $k_n > n$. Ainsi, $\forall\, n > n_0$, $k_n > n > n_0$, d'où $|U_{k_n} - l| < \epsilon$. La suite (U_{k_n}) est donc converge vers l.

Corollaire 11.30 *Toute suite convergente a une seule valeur d'adhérence.*

Provient directement de l'unicité de la limite d'une suite numérique.

Remark 11.1.5 *On peut utiliser ce résultat (comme c'est souvent le cas) pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite.*

Exemple 11.31 *Montrer que la suite* (U_n) *définie par :* $U_n = (-1)^n$ *est divergente. En effet,* $U_{2n} = 1$ *et* $U_{2n+1} = -1$. *Donc* (U_n) *a deux valeurs d'adhérence d'où* (U_n) *n'admet pas de limite.*

Propriété 11.32 *La suite réelle* (U_n) *converge si et seulement si les suites extraites* (U_{2n}) *et* (U_{2n+1}) *converge et on la même limite.*

Théorème 11.33 ***(Théorème des segments emboîtées)*** *Soit* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de segments emboîtés (i.e décroissantes pour la relation d?inclusion) telle que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(a_n - b_n) = 0$. *Alors :*

$$\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{l\},\ l \in \mathbb{R}$$

.

Soit $I_n = [a_n, b_n]$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, nous avons $a_m \leq b_n$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. En effet, si $m \leq n$ on a : $a_m \leq a_n \leq b_n$ car $I_n \subset I_m$, tandis que si $m \geq n$ on a : $a_m \leq b_m \leq b_n$ car $I_m \subset I_n$. La suite (a_m) est donc majorée, elle admet donc une borne supérieure l d?après le théorème de la borne supérieure. Bien sûr $l \geq a_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et de plus $l \leq b_n$ pour tout n car $a_m \leq b_n$. Ceci montre que $l \in I_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donc $l \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$.

Montrons que $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ ne contient que l. S?il n?en était pas ainsi, on aurait un intervalle $I = [a, b]$, contenant l, ayant longueur $b - a > 0$, entièrement contenu dans $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. On aurait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a < b \leq b_n$. Donc $|b_n - a_n| \geq b - a > 0$, ainsi $\lim_{\longrightarrow+\infty} |b_n - a_n| > 0$, ce qui contredit l?hypothèse $lim_{\longrightarrow+\infty}|b_n - a_n| = 0$.

Théorème 11.34 ***(Bolzano Weistrass)*** *De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$.*

Soit $(U_n)_n$, une suite réelle bornée. Alors il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall\ n$, $|U_n| \leq M$. Donc tous les termes de la suite sont dans $I_1 = [a_1; b_1] = [-M; M]$:

Soit $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ le centre de I_1. On obtient alors deux sous intervalles $[a_1; c_1]$ et $[c_1; b_1]$ de I_1. L'un au moins de ces deux sous intervalles contient une infinité de termes de (U_n), on le notera $I_2 = [a_2; b_2]$. On a alors $I_2 \subset I_1$ où I_2 est d'amplitude $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$.

Soit $c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ le centre de I_2. On obtient alors deux sous intervalles $[a_2; c_2]$ et $[c_2; b_2]$ de I_2. L'un au moins de ces deux sous intervalles contient une infinité de termes de (U_n), on le notera $I_3 = [a_3; b_3]$. On a alors $I_3 \subset I_2 \subset I_1$ où I_3 est d'amplitude $b_3 - a_3 = \dfrac{b_1 - a_1}{2^2}$.

On Itère par récurrence ce processus jusqu'à avoir pour $n > 3,\ n \in \mathbb{N}$, le sous intervalle $I_n = [a_n; b_n]$ contenant une infinté de termes de (U_n). $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ est le centre de I_n et on obtient les sous intervalles $[a_n; c_n]$ et $[c_n; b_n]$ dont l'un contient une infinité de termes de (U_n) que nous désignerons $I_{n+1} = [a_{n+1}; b_{n+1}]$. Ce sous intervalle contient une infinité de termes de (U_n) et est d'amplitude $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_1 - a_1}{2^n}$.

Nous avons ainsi construit une suite de segments emboîtés $(I_n = [a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(a_n - b_n) = 0$. Alors d'après le théorème des segments emboîtés, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = \{l\}$, $l \in \mathbb{R}$.

Construisons maintenant une sous-suite de (U_n) convergente vers l. Soit $U_{k_1} \in \{U_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} \subset [a_1, b_1]$. Par définition de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $k_2 > k_1$ et $U_{k_2} \in I_2$. De proche en proche, pour $n > 2$, il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k_n > k_{n-1}$ et $U_{k_n} \in I_n$. Montrons que la sous-suite (U_{k_n}) de (U_n) ainsi construite converge vers l.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq U_{k_n} \leq b_n$. Comme $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = \{l\}$, on pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l \in [a_n; b_n]$. Par conséquent $|U_{k_n} - l| \leq b_n - a_n$. Par passage à la limite membre par membre, on conclu que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_{k_n} = l$.

11.1.5 Suite de Cauchy

Définition 11.35 *une suite (U_n) est de Cauchy si, pour tout ϵ positif, il existe un entier naturel n_0 pour lequel, quel que soient les entiers p et q supérieurs ou égaux à n_0, on ait*

$$|U_p - U_q| < \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \ avec\ p \geq n_0\ et\ \ p \geq n_0,\ |U_p - U_q| < \epsilon \Rightarrow (U_n)\, est\, Cauchy.$$

Notons que p et q ne sont pas liés.

Propriété 11.36 *Une suite de réels, ou de complexes, converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Suite négligeable devant une autre

Définition 11.37 *On dit qu'une suite réelle (V_n) est négligeable devant la suite (U_n) de termes réels non nuls si la suite $(\frac{V_n}{U_n})$ converge vers 0, c'est-à-dire :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |\frac{V_n}{U_n}| \leq \epsilon$$

On écrit

$$V_n = \circ(U_n)$$

et on lit : V_n égal à petit $\circ$ de U_n.

Exemple 11.38

$$nSin(n) = \circ(n^2)$$

Suites équivalentes

Définition 11.39 *On dit qu'une suite réelle (V_n) est équivalente à la suite (U_n) de réels lorsque la suite $\left(\frac{V_n}{U_n}\right)$ converge vers 1. on écrit*

$$V_n \sim U_n$$

et on lit V_n équivalente à U_n

Remark 11.1.6

$$V_n \sim U_n \Longleftrightarrow U_n \sim V_n$$

Exemple 11.40

$$Sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n},\ ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n},\ \ e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n},$$

$$tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n},\ 1 - Cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2},\ \sqrt{n^2+3} \sim n.$$

11.2 Séries numériques

11.2.1 Définition et propriétés

Définition 11.41 *Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre. On appelle séie numérique de terme général U_n, la somme infinie de forme :*

$$U_0 + U_1 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

On utilise souvent la notation suivante :

$$\sum_{n\geq 0} U_n \ \ ou \ \ \sum_{k=0}^{+\infty} U_k \ ou \sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

Définition 11.42 *On appelle somme partielle de rang n de la série de terme général S_n définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_n = U_0 + U_1 + U_3 + \cdots + U_n$$

Définition 11.43 *On dit que la série de terme général U_n converge si :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell \ avec\ \ell \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas où

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$$

ou n'existe pas, on dit que la série de terme générale U_n diverge.

Supposons que

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

alors on écrit

$$S = \sum_{n\geq 0} U_n$$

Dans ce cas S est appelé la somme de la série de terme général U_n.

La série constituée par les termes d'une progression géométrique décroissante quelconque :

$$a + a.q + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = a\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + \cdots\right)$$

avec $|q| < 1$ est une série convergente dont la somme est :

$$S_n \frac{a}{1-q}.$$

La série suivante

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

est appelée série harmonique et elle diverge.

Exercice 11.44 *Etudier la convergente de la série*

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Résultats

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$$

La série est constituée par des termes d'une progression géométrique infiniment décroissante et pour cette raison la série est convergente ici,

$$a = \frac{2}{3} \; et \; q = \frac{1}{2}$$

d'où

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{4}{3}$$

Exercice 11.45 *Etudier la convergente de la série suivante*

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots$$

Résultats

La série proposée est obtenue par suppression des dix premiers termes d'une suite harmonique. Par conséquent cette suite diverge.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

11.2.2 Critère de convergence des séries à terme positif

Critère n°1

Si la série $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ converge alors la série $U_{m+1} + U_{m+2} + U_{m+3} + \cdots$ obtenue à partir de la série donnée en supprimant les m premiers termes, converge elle aussi. Cette dernière série est appelée m-ième reste de la série initiale.

Critère n°2

Si la série $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ converge et a pour somme le nombre S, alors la série $aU_1 + aU_2 + aU_3 + \cdots$ converge elle aussi, la somme de cette dernière série étant égale à aS.

Critère n°3

Si la série de terme général (U_n) converge alors :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

dans le cas contraire la série diverge.

Critère n°4

Soit $S_n$la somme partielle de rang n et S la somme de la série. La quantité :

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$$

est appelée le reste de la série.

La série de terme générale U_n converge si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$$

Critère n°5 (critère de comparaison)

Premier critère de comparaison

Considérons les séries de termes généraux U_n et V_n tels que $U_n \geq$ et $0 \leq U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang.

Si la série de terme général U_n diverge, alors la série de terme général V_n converge également.

Deuxième critère de comparaison S'il existe une limite finie et différente de 0

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = k \neq 0$$

alors les deux séries de terme général U_n et V_n convergent simultanément.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Critère n°6 (critère de d'Alembert)

Si à partir d'un certain rang n et $U_n \geq 0$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q < 1$ alors la série de terme général U_n converge.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q > 1$ alors la série de terme général U_n diverge.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ alors on assiste à un cas douteux. Pour cela, il faudra utiliser d'autre critères.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell.$

Exercice 11.46 *Etudier la convergence de la série*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad avecn > 0$$

Résultats

Ici le terme général de la série est :

$$U_n = \frac{X_n}{n!} \;\Rightarrow\; U_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{X^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{X^n}{n!}} = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{X^n} = \frac{X}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{X}{n+1} = 0 < 1$$

donc la série converge

Critère n°7 (critère de Cauchy)

Considérons la série de terme général U_n et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = q \;\; Si \begin{cases} q > 1 \text{ alors } (U_n) \; diverge \\ q < 1 \text{ alors } (U_n) \; converge \\ q = 1 \text{ cas doutex.} \end{cases}$$

Exercice 11.47 *Etudier la convergence de la série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Résultats

Le terme général de la série est :

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{U_n} = (U_n)^{\frac{1}{n}} &= \left[\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to+\inf} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\inf} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1$$

Donc la série diverge.

Critère n°8 (intégral de Cauchy)

Si $U_n = f(n)$ où f est la fonction $x \mapsto f(x)$ positive, décroissante et continue pour $x \geq a \geq 1$, alors la série de terme général U_n est l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge ou diverge simultanément.}$$

Exercice 11.48 *Etudier la convergence de la série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

Résultats

Selon le critère de D'Alembert appliqué à cette série où

$$U_n = \frac{1}{n^2}$$

et

$$U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

on a :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1 \text{ Cas douteux.}$$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Utilisons donc le critère intégral de Cauchy.

Soit

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

f est positive, décroissante et continue pour $x \geq 1$ alors calculons :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} f(x)dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{11.1}$$

Cette intégrale généralisée converge . Par conséquent la série donnée converge.

11.2.3 Les séries absolument convergentes

Si la série de terme générale

$$V_n = |U_n|$$

converge alors la série de terme général U_n converge aussi et on dit qu'elle est absolument convergente.

Si la série de terme générale

$$V_n = |U_n|$$

diverge alors alors la série de terme générale U_n est semi - convergente.

Propriété 11.49 *Soit $\sum U_n$ un une série à termes quelconques et$\sum V_n$ une série à termes positifs.*

1. *si $|U_n| \leq V_n$ avec $\sum V_n$ convergente, alors $\sum U_n$ est absolument convergente.*

2. *Si* / $|U_n| = \circ(vn)$ *avec* $\sum V_n$ *convergente, alors* $\sum U_n$ *est absolument convergente.*

3. *Si* / $|U_n| \sim \circ(vn)$ *avec* $\sum V_n$ *convergente, alors* $\sum U_n$ *est absolument convergente.*

4. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}|U_n| = 0$, *alors*$\sum U_n$ *est absolument convergente.*

5. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}}{U_n} = L < 1$ *alors* $\sum U_n$ *est absolument convergente.*

6. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}}{U_n} = L > 1$ *alors* $\sum U_n$ *est trivialement divergente.*

7. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \circ(\frac{1}{n})$ *alors* $\sum U_n$ *un est absolument convergente.*

Remark 11.2.1 *Pour des séries à termes quelconques, le critère d'équivalence n'est plus valable : on peut avoir* $U_n \sim V_n$, $\sum V_n$ *convergente, mais* $\sum V_n$ *divergente.*

11.2.4 Les séries à terme alternés

Ce sont des séries dont le terme général est alternativement positif et négatif à partir d'un certain rang.

Si pour la série à terme alternés

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5 - U_6 + \cdots + (-1)^{n-1}U_n,\ (U_n \geq 0),$$

les conditions du critère de Leibniz:

Première condition

$$U_1 > U_2 > U_3 > \cdots$$

Deuxième condition

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

11.3 Séries entière

Définition 11.50 *On appelle série entière de la variable* x *toute série de terme général :*

$$U_n = a_n x^n,\ avecn \in \mathbb{N}$$

ou

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

Les coefficients $a, a_0, a_1 \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

La somme partielle S_n :

$$S_n = a_0 + a_1 x_+ a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

est un polynôme de degré n.

La propriété essentielle des séries entières consiste en ce qui suit : si une série entière converge pour x_0, elle converge (et ceci absolument) pour toute valeur de x telle que l'inégalité $|x-a| < |x_0 - a|$ soit vérifiée (Théorème d'Abel).

11.3.1 Domaine de convergence d'une série entière

Considérons par exemple la série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \ avec\ x \in \mathbb{R}$$

C'est une série entière dans laquelle tous les coefficients valent 1.

Si $|x| < 1$ sa somme est

$$s(x) = \frac{1}{1-x} \ et\ |x| \geq 1$$

alors (x) est infinie.

En résumé la série converge pour $x \in]-1, 1[$.

11.3.2 Intervalle de convergence

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série converge, on dit que l'intervalle de convergence de

$$\{a_n X^n\}$$

est infini. Si la série diverge sauf pour $x_0 = 0$, on dit que l'intervalle de convergence est nul. S'il existe une valeur R, telle que pour $|x| < R$, la série converge et pour $|X| > R$ la série diverge, on dit que le rayon de convergence de la série est R. L'intervalle de convergence est au moins $]-R, +R[$.

Lorsque $|X| = R$, la série peut aussi bien converger que diverger.

L'un des corollaires du théorème d'Abel est le fait que, pour toutes série entière, il existe duquel la série entière converge absolument pour diverger à son extérieur. Aux extrémités de l'intervalle de convergence (aux points $X = a + -R$), diverses séries entières se comportent de manière différente:

1. les unes sont absolument convergentes aux deux extrémités,
2. d'autres sont soit semi-convergentes aux deux extrémités soit semi-convergentes à l'une d'elles pour diverger à l'autre,
3. enfin il y a celles qui divergent aux deux extrémités.

Le nombre R, qui est la moitié de la longueur de l'intervalle de convergence est appelé rayon de convergence d'une série entière. Dans les cas particuliers, le rayon de convergence R de la série peut être nul ou égal à l'infini. Si $R = 0$, alors la série entière ne converge que pour

$$X - a = 0,$$

mais si $R = \infty$, alors la série converge sur tout l'axe numérique (OX).

11.3.3 Recherche du rayon de convergence

Pour la recherche de l'intervalle et de rayon de convergence d'une série entière, on peut faire appel à l'un des procédés suivants :

1. Si parmi les coefficients de la série,

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

il n'y a pas de coefficients nuls, c'est-à-dire que la série contient toutes les puissances entières positives de la différence $X - a$, alors :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

si cette limite (finie ou infinie) existe.

2. Si la série initiale est de la forme :

$$a_0 + a_1(X-a)^p + a_2(X-a)^{2p} + \cdots + a_n(X-a)^{np} + \cdots$$

où p est un entier positif déterminé $2, 3, \cdots$, alors

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

3. Si parmi les coefficients de la série, il y en a qui sont nuls et que la succession des puissances restantes de la différence $X-a$ dans la série est quelconque (c'est-à-dire qu'elle ne forme pas une progression arithmétique comme dans le cas précédent), alors le rayon de convergence peut être trouvé d'après la formule :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

dans laquelle ne sont utilisées que les valeurs de a_n différentes de 0 (zéro). Cette formule est aussi applicable dans les cas 1. et 2.

4. Dans tous les cas, l'intervalle de convergence peut être trouvé en appliquant immédiatement le critère de d'Alembert ou celui de Cauchy à une série formée des valeurs absolues des termes de la série initiale.
En recopiant la série sous la forme ::

$$U_0 + U_1(X) + U_2(X) + \cdots + U_n(X) + \cdots$$

Ici $U_0 = a_0$, $U_n(X) = a_n(X-a)^N$, où le rapport entre entre N et n peut être quelconque, de coefficient du $n-$ème terme de la série et non le coefficient de $(X-a)^n$ étant désigné par a_n. On trouve l'intervalle de convergence à partir des inégalités :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < 1 \quad ou \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} < 1$$

Théorème 11.51 *Les séries obtenues par dérivation et intégration terme à terme d'une série entière admettent le même intervalle de convergence et leur somme à l'intérieur de cet intervalle de convergence est respectivement égale à la dérivée et à la l'intervalle de la somme de la série initiale.*
Donc si :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n \ alors\ S'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(X-a)^{n-1} \ et\ \int_a^X S(X)dX = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(X-a)^{n+1}}{n+1}$$

où

$$-R < X-a < R.$$

Chapitre

Fonctions de plusieurs variables

Jusqu'à présent vous avez surtout rencontré des fonctions d'une variable. Cependant les phénomènes naturels ne dépendent pas en général d'une seule variable. Par exemple : la vitesse moyenne v dépend de la distance parcourue d et du temps t mis pour effectuer ce parcours, on a v = d/t. Un autre exemple est donné par le calcul de l'aire d'un rectangle : $A = L \times l$. L'aire est une fonction de la longueur L et de la largeur l. donc dans la grande majorité des situations rencontrées en mathématiques et dans ses applications, Physique, Biologie, Ingénierie, Économie, etc., les systèmes dont on étudie le comportement dynamique, dépendent non pas d'une variable x, souvent le temps t, mais de plusieurs variables Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables. Nous aurons une attention toute particulière pour les fonctions de deux, et ou de trois variables

12.1 Définition et exemple

L'exemple le plus simple de fonctions de deux variables est donné par l'aire d'un rectangle : $A = L \times l$. L et l étant des nombres positifs nous représentons cette fonction de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (L, l) &\longmapsto L \times l \end{aligned}$$

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ s'appelle le domaine de définition de la fonction f.

Définition 12.1 *On appelle $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ l'ensemble défini de la façon suivante :*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots ,_n)/x_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}\}$$

D'une manière générale nous pouvons avoir n variables où n désigne un nombre entier.

Définition 12.2 *Soit n un nombre entier et $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f de n variables est un procédé qui a tout n-uplet $(x1, \cdots, x\,n)$ de $\mathcal{D}$ associe un unique nombre réel.*
Cela se note de la manière suivante :

$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto f(x_1, \cdots, x_n)$$

$\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f.

Remark 12.1.1 *La notation $(x_1, \cdots, x_n)$ est là pour montrer que nous avons n variables.*

1. la fonction suivante donne la distance d'un point de coordonnées (x, y) à l'origine du plan.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

   f est une fonction de deux variables, $\mathbb{R}^2$ est son domaine de définition.

2. Voici, ici un exemple d'une fonction de trois variables :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto \frac{xsin(y) + 2z - 3}{z^3}$$

   f est une fonction de trois variables, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est son domaine de définition.

Exercice 12.3 *La formule suivante permet de définir une fonction de 2 variables :*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto ln(x) + sin(y)$$

1. Donner l'image de $(e, 0)$.

2. Donner le plus grand domaine de définition possible pour f

Résultats

1. $f(e, 0) = ln(e) + sin(0) = 1 + 0 = 1$. L'image de $(e, 0)$ par f est 1.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

2. Pour que ln(x) existe il faut (et il suffit) que $x > 0$. Donc $x \in \mathbb{R}_+^*$. $sin(y)$ existe pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $y \in \mathbb{R}$.

   Ainsi le plus grand domaine de définition possible pour f est : $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 12.4 *On considère la fonction f définie par :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto ln(x+y) + sin(y) \end{aligned}$$

Détermine le domaine de définition de f.

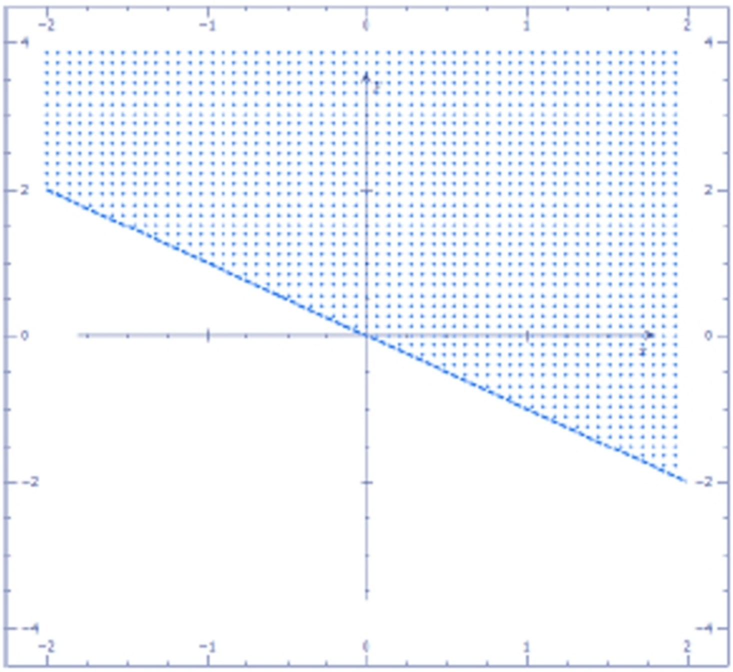
Résultat

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 0\}$$

Soit (D) la droite d'équation

$$x + Y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

D_f est l'ensemble des points du plan hachuré privé des point de la droite (D)



12.2 Notion de boucle fermées et de boucles ouvertes

Soit $\Omega(a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle boucle ouverte de centre Ω et de rayon r l'ensemble noté $\mathbf{B}(\Omega, r)$ défini par :

$$\mathbf{B}(\Omega, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x_a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\}.$$

On appelle boucle fermé l'ensemble

$$\mathbf{B}(\Omega, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x_a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq r^2\}.$$

La sphère ou boule est

$$S(\Omega, r) = \mathbf{B}(\Omega, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x_a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}.$$

Exercice 12.5 *On considère la fonction f définie par :*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{x^2 + y}$$

Détermine le domaine de définition de f.

Résultat

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$$

D_f est l'extérieur de la boule de centre Oet de rayon $1ul$.

Le domaine de la fonction f est donc l'extérieur d'une boucle fermée de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon $r = 1ul$

12.3 Courbe de niveau

12.3.1 Ligne de niveau

On appelle ligne de niveau d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

$$L_f = \{(x, y) \in D / f(x, y) = k, \ avec\ k\, constante \ \in \mathbb{R}\}$$

12.3.2 Surface de niveau

Soit f, une définie sur $D \subset \mathbb{R}^3$

$$L_f = \{(x, y, z) \in D/f(x, y, z) = k, \ avec\ k\, constante \ \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 12.6 *Déterminer les surfaces de niveau de f définie par :*

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + Z^2$$

Résultats

$$L_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x^2 - y^2 + Z^2 = k, \ avec\ k\, constante \ \in \mathbb{R}\}$$

Premier cas : $k = 0$

$x^2 - y^2 + Z^2 = 0$ il s'agit d'un cône d'axe (oy) de sommet à l'origine .

Deuxième cas : $k < 0$

Il s'agit d'une famille d'hyperboloïdes à deux nappes **Deuxième cas** : $k > 0$

Il s'agit d'une famille d'hyperboloïdes à une nappes

12.4 Limite et continuité

En dimension 1, on a vu que la notion de continuité est associée 'a celle de limite. Une fonction est continue en x_0 si $f(x)$ s'approche de $f(x_0)$ lorsque x s'approche de x_0, c'est-à-dire lorsque $| x - x_0 |$ devient petit. En dimension supérieure, pour définir les notions de limite et de continuité, il est tout d'abord nécessaire de définir une notion de proximité, et c'est-à-dire de définir la distance entre deux points de R^n. Il y a de nombreux choix possibles, mais ils conduisent tous aux mêmes notions de limite et de continuité. Nous en considèrerons un seul, pour sa simplicité.

Définition 12.7 (Distance) *. Soient $u, v \in R^n$. La distance de u à v, notée $d(u, v)$ est définie par $d(u, v) = \sum_{i=1}^{n} | u_i - v_i |$*

En particulier, pour $d = 2$, la distance d'un point (x, y) à $(0, 0)$ est égale à $|x| + |y|$.

Définition 12.8 (Limite) *On dit que la fonction f définie sur un domaine D de R^n admet la limite ℓ en u_0 si pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $d_0 > 0$ tel que si $d(u, u_0) \leq d_0$, alors $|f(u)\ell| \leq \epsilon$. On note*

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = \ell$$

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Le fait que f admette la limite ℓ en u_0 signifie d'une part que si u est proche de u_0, alors $f(u)$ est proche de ℓ, et surtout que l'on peut obtenir une approximation arbitraire de ℓ par une évaluation de f en un point u, à condition que u soit assez proche de u_0.

Remark 12.4.1 *Lorsque l'on dit que u s'approche de u_0 au sens de la distance d définie ci-dessus, le chemin par lequel u s'approche de u_0 n'est pas pris en compte. Donc lorsque f admet une limite ℓ en u_0, $f(u)$ s'approche de ℓ quelle que soit la façon dont u s'approche de u_0.*

Exemple 12.9 *en dimension 2, un point (x, y) peut s'approcher de 0 d'une infinité de façon, par exemple :*

1. *le long de l'axe horizontal, c'est-à-dire que $y = 0$ et x tend vers 0,*
2. *le long de l'axe vertical, i.e. $x = 0$ et y tend vers 0,*
3. *le long de la diagonale, i.e. $x = y$ et tend vers 0,*
4. *le long d'une courbe quelconque, par exemple la parabole $y = x^2$.*

Si $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = \ell$, alors quel que soit le chemin que u prend pour aller à u_0, $f(u)$ va à ℓ.

On peut utiliser cette remarque pour montrer a contrario qu'une fonction n'admet pas de limite en un point donné.

Exercice 12.10 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Démontrer que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$

Résultat

le long d'un axe, par exemple le long de l'axe horizontal, on a $f(x, 0) = 0$ pour tout $x \neq 0$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = 0$ (la limite est ici considérée pour une fonction de la seule variable x). De même, $f(0, y) = 0$ pour tout $y \neq 0$, et donc $\lim\limits_{y\to 0} f(0, y) = 0$. Le long de la diagonale $x = y$, on a $f(x, x) = \frac{1}{2}$ pour tout $x \neq 0$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = \frac{1}{2}$. La fonction f n'admet donc pas de limite en 0.

Définition 12.11 (continuité) *Une fonction f définie sur un domaine D de R^n est continue en un point u_0 si*

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$$

. Elle est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Remark 12.4.2 *Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. Notamment, les polynômes, les fractions rationnelles aux points où le dénominateur en s'annule pas. Les règles de la continuité des fonctions d'une seule variable s'appliquent : la somme, le produit de fonctions continues sont des fonctions continues. La composée de deux fonctions continues est continue.*

Exercice 12.12 *On considère la fonction f définie par :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} 0 \ si \ y = 0 \\ y^2 sin(\frac{x}{y}) \, si \, y \neq 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f.

Résultat

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\} = \mathbb{R}^2$$

Posons

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$|f(x, y) - f(x_0, 0)| = \begin{cases} 0 \ si \ y = 0 \\ y^2 sin(\frac{x}{y} \ si \ y \neq 0) \end{cases}$$

Si $y \neq 0$, on a donc

$$|f(x, y) - f(x_0, 0)| \leq y^2$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$ alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} |f(x, y) - f(x_0, 0)| = 0 = f(x_0, 0)$$

et donc f est continue en $(x_0; 0)$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

12.5 Dérivées partielles, Différentielles

Nous connaissons la dérivation des fonctions d'une seule variable. Ici nous allons voir comment étendre cette notion au cas des fonctions de plusieurs variables. La plupart des énoncés de cette partie ne concerneront que les fonctions de deux variables, le cas des fonctions de trois variables ou plus s'en déduit aisément.

12.5.1 Rappel

Puisque nous allons généraliser la notion de dérivée aux fonctions de deux variables, rappelons tout d'abord quelques définitions et notations pour les fonctions d'une seule variable.

Définition 12.13 *Soit*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

On dit que f est dérivable en x et de dérivée $f'(x)$ lorsque la limite suivante est finie (c'est-à-dire la limite existe et ce n'est pas $+\infty$ ou $-\infty$).

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+0)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Notations 12.14 *Une autre façon d'écrire $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ est la suivante*

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

On obtient alors

$$df = f'(x)dx.$$

12.5.2 Fonction partielles

Soit $f : D \to R$ une fonction définie sur un domaine D de R^n. On appelle i-ème fonction partielle au point $_a = (a1, \cdots, a_n) \in D$ la fonction f_i, définie sur le domaine

$$D_i = \{x \in \mathbb{R} \, / (a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n) \in D\}$$

, par

$$\forall\, x \in D_i,\ \ f_i(x) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

Exercice 12.15 *On considère les fonctions f g définies par :*

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto xy^2z^3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

1. *Déterminer les fonctions partielles de f en $a = (1, -1, 2)$*

2. *Déterminer les fonctions partielles de g en $a = (\frac{1}{2}, 1)$*

Résultats

1. Les fonctions partielles de f en a sont définies sur$\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = f(x, -1, 2) = 8x,\ f_2(y) = f(1, y, 2 = 8y)\ et\ f_3(z) = f(1, -1, z) = z$$

2. Les deux fonctions partielles de g en a sont :

$$g_1 : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{3 - x^2}$$

$$g_2 : [-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \sqrt{\frac{15}{4} - y^2}$$

12.5.3 Dérivée partielle

Définition 12.16 *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. Pour $i = 1, \cdots, n$, on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en $a = (a_1; \cdots; a_n)$, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée de la fonction partielle de f prise en a_i*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f((a_1; \cdots; x_i \cdots a_n)) - f(a_1; \cdots; a_i; \cdots a_n)}{x_i - a_i}.$$

Pour une fonction de deux variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point $a = (a_1; a_2) \in D$ les dérivées partielles de f en $(a_1; a_2)$ sont les dérivées des fonctions partielles $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ et $x_2 \mapsto f(a_1; x_2)$, où x_1, et x_2ß$\mathbb{R}$ qui se calculent de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

On les note parfois $f'_{x_1}(a_1, a_2)$ *et* $f'_{x_2}(a_1, a_2)$

Remark 12.5.1 *Attention : une fonction peut posséder des dérivées partielles en un point sans pour autant être continue en ce point ! C'est pour cela que l'on donne la condition suffisante suivante pour qu'une fonction soit continue en un point*

Théorème 12.17 *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que les* n *fonctions* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *pour* $i = 1, \cdots, n$ *soient continues au point* $(a_1, \cdots, a_p) \subset D$*. Alors* f *est aussi continue en ce point.*

Exercice 12.18 *On considère la fonction* f *définie par :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x2+y^2} \ si \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \ si \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. *Déterminer le domaine de définition de* f
2. *Etudier la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}^2$
3. *Calculer* $f'_x(0, 0)$ *et* $f'_y(0, 0)$
4. *calculer sur* $f'_x(x, y)$ *et* $f'_y(x, y)$

Résultats

1. $$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \ / \ x^2 + y^2 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\} = \mathbb{R}^2$$

2. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,
$$\mid f(x, y) \mid \leq \frac{\mid xy \mid (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \leq \mid xy \mid$$
comme
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mid xy \mid = 0,$$
on en déduit que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$
Ainsi $f$est continue en $(0, 0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

3. Pour $x \neq 0$,
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{x \times 0(x^2-0^2)}{x(x^2+0^2)} = 0$$
et donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0.$$
Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0;0)$ et
$$f'_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
De même,
$$f'_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

4. Pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
Finalement, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par
$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable définie par:
$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Définition 12.19 *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel, $x_0 \in \mathbb{R}$, f et partiellement dérivable en (x_0, y_0) si et seulement si ses dérivées partielles en (x_0, y_0) par rapport à chaque variable existent. De plus f est continuent partiellement dérivable en (x_0, y_0) si et seulement si chaque dérivée partielle existe et sont continues en (x_0, y_0) d'où le mot "continumnt". On dit aussi que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (x_0, y_0). On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un domaine D si et seulement si toutes les les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k existent et sont contenues sur D.*

12.5.4 Différentiabilité et différentielle totale d'une fonction

Dans la première section de cette section nous avons vu la notation différentielle. Pour une fonction d'une variable *$f(x)$ on a : $df = f'(x)dx$. Ici une fois de plus nous allons généraliser ce qui a été fait à une variable :

Différentiabilité d'une fonction

Soit f la fonction de variable (x, y) définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe une fonction numérique ϕ de variable (x, y) définie sur Dde limite nulle lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) et que la relation suivante est vérifiée :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) + \phi(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

avec

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x, y) = 0$$

Si f est différentiable au point (x_0, y_0) alors la partie linéaire par rapport à x et y c'est-à-dire $(x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)$ est appelée la différentielle première de f au point (x_0, y_0) et est noté $df(x_0, y_0)$ et on a :

$$df(x_0, y_0) = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0).$$

En posant $x - x_0 = dx$ et $y - y_0 = dy$, on a

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

Théorème 12.20 *Toute fonction différentiable au point (x_0, y_0) est continue en ce point. Si f est différentiable, elle est continue et admet des dérivées premières. La réciproque est vraie si les dérivées premières f'_x et f'_y continues. Une fonction différentiable est donc dérivable.*

Théorème 12.21 *Soit f u,e fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Supposons qu'en tout point de D, il existe des dérivées partielles premières par rapport à x et y. Si les dérivées partielles premières sont définies et continues sur D alors f est différentiable en tout point de D. La conséquence immédiate est la suivante. Si f est différentiable en (x_0, y_0) alors il existe des dérivées partielles en ce point.*

Différentiabilité totale d'une fonction

Définition 12.22 *Soit f une fonction de deux variables (x, y). On note alors la différentielle de f de la manière suivante :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Evidemment si f est une fonction de trois variables (x, y, z) alors on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Exercice 12.23 *Calculer la différentielle de $f(x, y, z) = x^2y^2z^7 + x + sin(z) + \sqrt{2}$.*

Résultats

$$df = (2xy^3z^7 + 1)dx + 3x^2y^2z^7dy + (7x2y3z6 + cos(z))dz$$

Définition 12.24 *La différentielle totale d'une fonction f de n variables s'effectue par la formule :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Différentielle logarithmique

C'est la différentielle du logarithme de la valeur absolue de la fonction. Pour $f(x, y, z)$, fonction de trois variables, la différentielle logarithmique est:

$$d[ln \mid f(x, y, z) \mid] = \frac{df}{f} = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$$

C'est donc le quotient de la différentielle totale par la fonction.

Propriété 12.25 *Soient f et g deux fonctions différentiables de 3 variables indépendantes x, y et z.*

1. *Produit de fonctions*

$$d[ln \mid f \cdot g \mid] = d[ln \mid f \mid] + d[ln \mid g \mid] = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g}$$

2. *Quotient de fonctions*

$$d[ln \mid \frac{f}{g} \mid] = d[ln \mid f \mid] - d[ln \mid g \mid] = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g}$$

3. *Evaluation à une puissance r*

$$d[ln \mid f^r \mid] = d[rln \mid f \mid] = rd[ln \mid f \mid] = r\frac{df}{f}$$

Exercice 12.26 *Calculer la différentielle logarithmique de :*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Résultat

$$ln \mid f(x,y) \mid = ln \mid \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = ln \mid x^2 - y^2 \mid - ln \mid x^2 + y^2 \mid$$

$$ln \mid f(x,y) \mid = d[ln \mid x^2 - y^2 \mid] - d[ln \mid x^2 + y^2 \mid] = \frac{d(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} - \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$ln \mid f(x,y) \mid = \frac{2xdx - 2ydy}{x^2 - y^2} - \frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{4xy^2}{x^4 - y^4}\right) dx - \left(\frac{4x^2y}{x^4 + y^4}\right) dy$$

12.5.5 Dérivées d'ordres supérieures et dérivées mixtes

Supposons que f soit définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$

Les dérivées premières des dérivées partielles premières sont appelées dérivées partielles secondes. Elles sont de 4 types:

1. Dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xx} \;\; et \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yy},$$

2. Dérivées mixtes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xy} \;\; et \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{yx},$$

Enonçons le théorème suivant sur l'égalité des dérivées mixtes : c'est le théorème de Schwarz.

Théorème 12.27 *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que f admet deux dérivées secondes mixtes.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xy} \;\; et \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{yx},$$

Ces dérivées secondes mixtes sont égales en tout (x,y) de D si ele sont continues en tout point (x,y) de D. On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{yx},$$

Exercice 12.28 *On considère la fonction f définie par :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *En utilisant les résultats de l'exercice 12.18, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$*

2. *Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$*

Résultats

1. Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (0;0). Pour $(x;y) \neq (0;0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{|y|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} \leq 2|y|$$

Puisque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| = 0$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = 0.$$

On en déduit que l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en (0;0) et donc sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{x^4}{x^4} = 1$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 1$$

Par conséquent $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$

Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -\frac{y^4}{y^4} = -1$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -1$$

Par conséquent $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

et donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

Différentielle seconde

Soit f la fonction de variable (x, y) définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$, on suppose que f admet des dérivées partielles secondes toutes continues sur D. La différentielle seconde de f en tout point (x, y) est :

$$d^2 f(x,y) = f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

où

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

devient un opérateur agissant sur f.

Plus généralement si la fonction f à deux variables est de classe $\mathcal{C}^n$ alors

$$d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n .f$$

Pour une fonction à trois variables (x, y, z), on a :

$$d^2 f(x,y,z) = f''_{xx}(x,y,z)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y,z)dxdy + 2f''_{xz}(x,y,z)dxdz + 2f''_{yz}(x,y,z)dydz + f''_{yy}(x,y)dy^2 + f''_{zz}(x,$$

Plus généralement si la fonction f à trois variables est de classe $\mathcal{C}^n$ alors

$$d^n f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n .f$$

12.6 Approximation affine, Calcul d'incertitude

12.6.1 Approximation d'une fonction à une seule variable

Une fois de plus nous commençons un chapitre en rappelant la définition de la dérivée d'une fonction en une seule variable.

Définition 12.29 *soit*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

On dit que f est dérivable en x et de dérivée $f'(x)$ lorsque la limite suivante est finie (c'est 'a dire la limite existe et ce n'est pas $+\infty$ ou $-\infty$).

$$f'(x) = \lim_{\delta_x \to 0} \frac{f(x+\delta_x) - f(x)}{\delta_x}$$

Remark 12.6.1 *Traditionnellement lorsque l'on définit la dérivée d'une fonction d'un point de vue théorique le petit nombre qui tend vers 0 se note h. Lorsque l'on effectue un calcul d'erreur, on utilise comme notation δ_x à la place de h.*
Puisque nous avons une égalité lorsque δ_x tend vers 0 nous en déduisons l'approximation suivante :

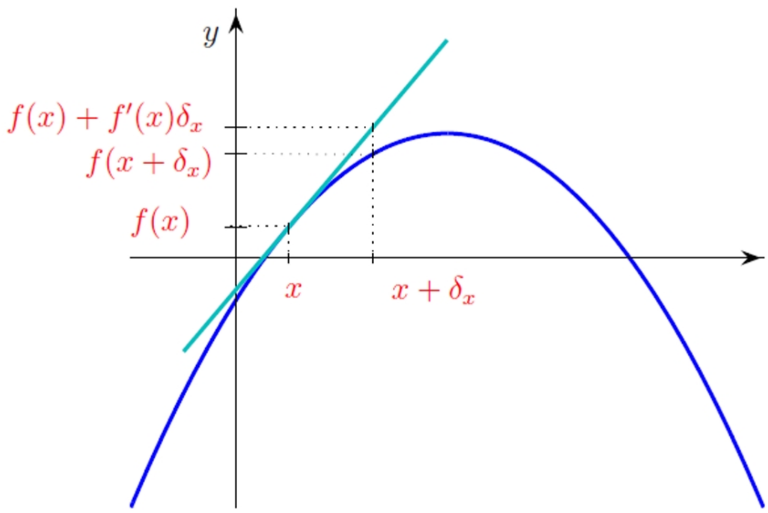
Propriété 12.30

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\delta_x) - f(x)}{\delta_x}$$

Propriété 12.31 *L'approximation affine d'une fonction d'une variable est*

$$f(x+\delta_x) = f(x) + \delta_x f'(x)$$

Interprétation graphique :



τ est la tangente de f en x. Avec nos notations $f(x) + \delta_x f'(x)$ représente l'ordonnée du point de τ d'abscisse $x + \delta_x$. Il est donc naturel de dire que $f(x+\delta_x)$ et $f(x) + \delta_x f'(x)$ sont très proches.

12.6.2 Approximation d'une fonction de plusieurs variables

Les idées précédentes peuvent s'appliquer aussi aux dérivées partielles. En effet, nous avons vu qu'une dérivée partielle n'est rien d'autre que la dérivée d'une fonction à une seule variable. Voyons cela sur un exemple.

Propriété 12.32 (Approximation affine d'une fonction de deux variables) *Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables. Nous avons l'approximation suivante :*

$$f(x+\delta_x, Y+\delta_y) = f(x,y) + \delta_x f'_x(x,y) + \delta_y f'(x,y)$$

Lorsque δ_x et δ_y deviennent de plus en plus petit, l'approximation devient meilleure.

Exercice 12.33 *Soit $f(x,y) = 3x2 - xy - y2$. Calculer sans calculatrice une valeur approchée de $f(1,01;2,98)$.*

Résultats

Nous allons utiliser la proposition 3 avec $x = 1$, $\delta_x = 0,01$, $y = 3$ et $\delta_y = -0,02$.

$$f(1,01;2,98) = f(1;3) + f'_x(1,3) \times 0,01 + f'_y(1,3) \times (-0,02) = -8,87$$

Remark 12.6.2 *La valeur exacte de $f(1,01;2,98)$ est $-8,8299$.*

12.7 Calcul d'erreur

12.7.1 Le cas des fonctions d'une seule variable

Lorsque nous faisons des mesures nous effectuons des erreurs dues à la précision des outils dont nous disposons. Il faut donc faire une distinction entre valeur exacte (théorique) et valeur approchée (obtenue par la pratique).

Par exemple, supposons que nous mesurons le côté d'un carré. On obtient par une mesure 9,98 mètres et nous savons que nos appareils de mesure donne une précision à $0,05$ mètres prés. Cependant la mesure exacte est de 10 mètres. Il existe donc une différence entre valeur mesurée et valeur exacte. Dans notre cas, cette erreur est de $0,02$ mètres.

Définition 12.34 *D'une manière générale, on notera x la valeur mesurée, δ_x l'erreur de mesure et Δ_x la précision de l'appareil de mesure. Ainsi, la valeur exacte est $x+\delta_x$. De plus $|\delta_x| \leq \Delta_x$.*

Remark 12.7.1 *Dans notre cas nous avons donc $x = 9,98$ et $\delta_x = -0,02$ et $\Delta_x = 0,05$.*

En pratique, seul $x$et Δ_x sont connus ! ! ! Nous remarquons qu'en pratique nous ne connaissons pas δ_x. (Si on connait une mesure et l'erreur de cette mesure alors on connait la valeur exacte $\cdots$)

Définition 12.35 (erreur absolue) *L'erreur $|f(x+\delta_x) - f(x)|$ se note δ_f. Cette erreur s'appelle aussi* ***erreur absolue****.*

Propriété 12.36 *On note $\Delta_f = |f'(x)|\Delta_x$. Δ_f est l'ordre de grandeur de l'erreur absolue. Avec les notations précédentes nous avons :*

$$|\delta_f| \approx |f'(x)|\Delta_x = \Delta_f.$$

Définition 12.37 *On appelle erreur relative le quotient :*

$$\frac{\Delta_f}{|f(x)|}$$

Ce nombre s'exprime en pourcentage.

Remark 12.7.2 *Calculer l'erreur relative revient à calculer*

$$\frac{|f'(x)|}{|f(x)|}\Delta_x$$

Nous pouvons donc calculer l'erreur relative à partir d'un calcul de dérivée logarithmique. En effet

$$\frac{|f'(x)|}{|f(x)|} = |\,(ln\,(f(x)))'\,|$$

12.7.2 Le cas des fonctions de plusieurs variables

Comme d'habitude nous allons généraliser ce que nous venons de voir pour les fonctions d'une seule variable.

Concrètement pour passer de la différentielle df à l'erreur Δ_f, nous avons :

1. pris la valeur absolue de chaque terme,

2. remplacer le signe $=$ par le signe $\approx$.

Nous allons faire la même chose pour les fonctions de plusieurs variables.

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Propriété 12.38 *Soient x et y deux mesures, δ_x et δ_y les erreurs de mesure et Δ_x, Δ_y la précision des appareils qui ont mesuré x et y. Nous pouvons estimer l'erreur absolue*

$$\delta_f = |f(x+\delta_x, y+\delta_y) - f(x,y)|$$

de la manière suivante :

$$|\delta_f| \approx |f'_x(x,y)|\Delta_x + |f'_y(x,y)|\Delta_y$$

On note $\Delta_f = |f'_x(x,y)|\Delta_x + |f'_y(x,y)|\Delta_y$. Δ_f représente l'ordre de grandeur de l'erreur absolue.

On peut définir de même l'erreur relative :

Définition 12.39 *On appelle erreur relative le quotient :*

$$\frac{\Delta_f}{|f(x,y)|}$$

Ce nombre s'exprime en pourcentage.

Remark 12.7.3 *Calculer l'erreur relative revient à calculer :*

$$\frac{|f'_x(x,y)|\Delta_x + |f'_y(x,y)|\Delta_y}{|f(x,y)|}$$

Nous remarquons qu'ici aussi nous pouvons obtenir l'erreur relative en utilisant la dérivée d'un logarithme. En effet,
$\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}$ *est la dérivée partielle de $ln(f)$ par rapport à x.*
Nous avons la même chose pour la dérivée par rapport à y.
Ainsi, calculer l'erreur relative revient 'a calculer la différentielle de $ln(f)$.

Exercice 12.40 *On mesure une longueur ℓ en mètres et on obtient $\ell = 50 \pm 0,1$ mètres. Cela signifie que la longueur mesurée est de 50 mètres et que la précision de la mesure est de 0,1 mètre.*
Un coureur parcourt cette distance en $t = 5,8 \pm 0,01$ secondes. (Le temps mesuré est de 5,8 secondes et la précision de cette mesure est de $0,01$ secondes.)

1. *Calculer la vitesse moyenne du coureur sur ce parcours.*
2. *Donner une estimation de l'erreur absolue commise 'a partir de ces mesures.*
3. *Calculer l'erreur relative commise 'a partir de ces mesures.*

Résultats

1. $v = \frac{\ell}{t} = \frac{50}{5.8} = 8,6206\cdots$

2. $$v(\ell,t) = \frac{\ell}{t}$$

   D'où
   $$dv = \frac{1}{t}d\ell - \frac{\ell}{t^2}dt$$

   Ainsi
   $$\Delta_v = |\frac{1}{t}|\Delta_\ell + | - \frac{\ell}{t^2}|\Delta_t = \frac{1}{5.8}\cdot 0.1 + \frac{50}{5.8^2}\cdot 0.01$$

   L'erreur absolue est donc d'environ $0,03m.s^{-1}$.

   Pratiquement le chiffre des millièmes n'a donc aucun sens dans l'écriture $v = 8,6206$ puisque que le résultat est connu à $0,03$ près.

3. L'erreur relative est :
   $$\frac{\Delta_v}{|v|} = \frac{0.03}{8.62} = 0,003\cdots$$

   L'erreur relative est donc de $0,3$ pour cent.

12.8 Formule de Taylor

12.8.1 Formule de Taylor à l'ordre 2

Théorème 12.41 *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0) \in D$. On suppose qe f est deux fois continument différentiable dans le voisinage de (x_0,y_0), c'est-à-dire f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 toutes continues dans le voisinage de (x_0,y_0) alors la formule suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + (x-x_0)f'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f'_y(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2 f''_{xx}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)f''_{xy}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2 f''_{yy}(x_0,y_0)\right] \\ &+ R_2(x,y) \end{aligned} \tag{12.1}$$

où $R_2(x,y)$ est le reste.

Cette formule est appelée **formule de Taylor à l'ordre 2** dans le voisinage (x_0,y_0) et $R_2(x,y)$ est le reste de la formule de Taylor à l'ordre 2 dans le voisinage de (x_0,y_0) à l'ordre 2.

sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

Exercice 12.42 *On donne* $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$ *et* (x_0, y_0) *égal au couple* $(1,1)$.
Développer cette fonction par la formule de Taylor à l'ordre 2 *au voisinage de* $(1,1)$. *En déduire l'approximation de cette fonction dans ce voisinage.*

Théorème 12.43 *Soit* f *une fonction de trois variables* x, y, z *définie par* $f(x,y,z)$ *que l'on suppose suffisamment différentiable. On a alors :*

$$\begin{aligned}
f(x+h_1, y+h_2, z+h_3) &= f(x,y,z) + \left(h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + h_3\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)\\
&+ \frac{1}{2!}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + h_3^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\right)\\
&+ \left(h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) + h_1h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) + h_2h_3\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)\right)\\
&+ \cdots\cdots\\
&+ \textit{(ordre supérieurs)}
\end{aligned}$$

En pratique, on utilise principalement le développement de degré 1 qui ne fait intervenir que les dérivées partielles d'ordre 1.

Exercice 12.44 *Soit la fonction de deux variables*

$$f(x,y) = x^2 + xsin(y)$$

1. *Développer* f *au voisinage de* $(1,0)$.
2. *Trouver à l'aide du polynôme de Taylor de degré* 2 *l'approximation de* f *en prenant* $h_1 = h_2 = 0.1$.
3. *Trouver l'ordre de cette approximation en utilisant* $h_1 = h_2 = 0.05$

Résultats

1. Développons f au voisinage de $(1,0)$.

   En posant $x = 1 + h_1$ et $y = 0 + h_2 = h_2$, le développement de Taylor permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
f(1+h_1, 0+h_2) &= f(1,0) + \left(h_1\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)\\
&+ \frac{1}{2!}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\right)\\
&+ \left(h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) + h_1h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(1,0)\right)\\
&+ \cdots\cdots\\
&+ \text{(ordre supérieurs)}
\end{aligned}$$

- Calculons d'abord $f(1,0)$.

$$f(1,0) = 1 + 0 = 1$$

- Calculons en suite les dérivées partielles du premier ordre.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + sin(y); \;\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2 + 0 = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + xCos(y); \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1Cos(0) = 1$$

- Calculons en suite les dérivées partielles du second ordre.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2; \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -xsin(y); \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 0$$

- Calculons en suite les dérivées mixte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(xCos(y))}{\partial x} = Cos(y); \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 1$$

D'où le développement de $f(x,y)$ est :

$$f(1+h_1, 0+h_2) = 1 + 2h_1 + h_2 + h_1^2 + h_1h_2 + \cdots + \text{ordre supérieur}$$

2. Approximation de f en prenant $h_1 = h_2 = 0.1$.

   Le résultat précédent donne en posant $h_1 = h_2 = 0.1$

$$f(1,1;0,1) \approx 1 + 2(0,1) + 0,1 + (0,1)^2 + 0,1(0,1) \approx 1,32$$

3. Ordre de cette approximation en utilisant $h_1 = h_2 = 0.05$

$$f(1,1;0,1) = 1,319816758 \;\; et \;\; f(1,05;0,05) = 1,154978128$$

$$P(1,1;0,1) = 1,32 \;\; et \;\; f(1,05;0,05) = 1,155$$

$$\begin{aligned}
\frac{|f(1,1;0,1) - P(1,1;0,1)|}{|f(1,05;0,05) - P(1,05;0,05)|} &= \frac{|1,319816758 - 1,32|}{|1,154978128 - 1,155|} \\
&= \frac{183,24169.10^{-6}}{21,87227.10^{-6}} \\
&= 8,37 \\
&\approx 2^3
\end{aligned}$$

   D'où le polynôme

$$P(1+h_1, 0+h_2) = 1 + 2h_1 + h_2 + h_1^2 + h_1h_2$$

   de degré 2 est une approximation d'ordre 3 de $f(x,y) = x^2 + xSin(y)$ au voisinage du point $(1,0)$.

12.9 Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Nous savons trouver et étudier le maximum et le minimum d'une fonction d'une variable. Nous utilisons pour cela la dérivée. Nous allons voir dans ce chapitre comment trouver le maximum ou le minimum d'une fonction de plusieurs variables.

12.9.1 Rappel dans le cas d'une seule variable

Définition 12.45 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*

1. $f(x_0)$ *est un maximum global de* f *si :*

$$f(x) \leq f(x_0), \, pour\, tout\, x \in I.$$

2. $f(x_0)$ *est un maximum local de* f *s'il existe un intervalle* $]a, b[\subset I$ *contenant* x_0 *tel que :*

$$f(x) \leq f(x_0), pourtoutx \in]a, b[.$$

3. $f(x_0)$ *est un minimum global de* f *si :*

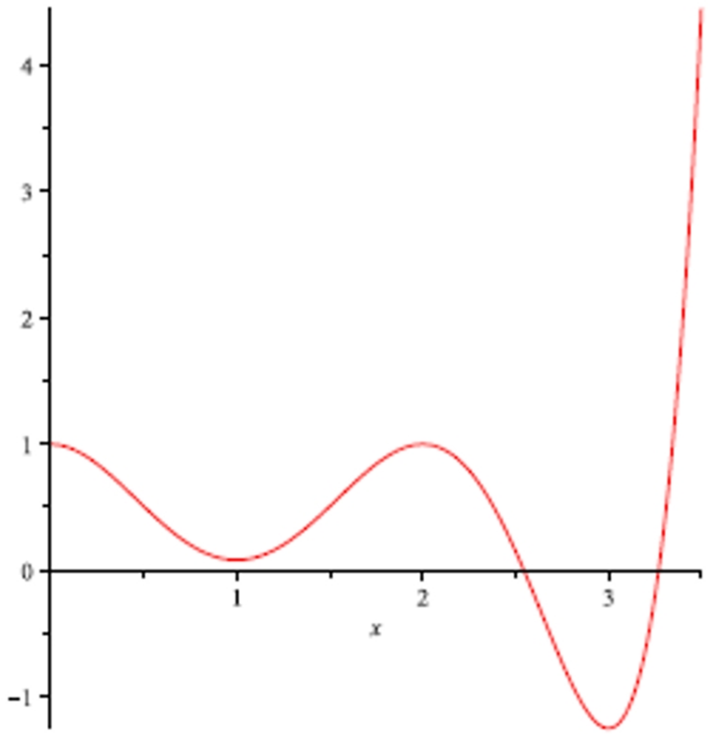
$$f(x) \geq f(x_0), \, pour\, tout\, x \in I.$$

4. $f(x_0)$ *est un minimum local de* f *s'il existe un intervalle* $]a, b[\subset I$ *contenant* x_0 *tel que :*

$$f(x) \geq f(x_0), pourtoutx \in]a, b[.$$

Un extremum (extrema au pluriel) désigne soit un maximum soit un minimum.

Exercice 12.46 *Graphiquement, donner les extrema locaux et globaux de la fonction suivante* f *définie sur* $[0; 3, 5]$ *:*



Résultats

Sur le graphique nous constatons qu'en $x = 0$ et $x = 2$ nous avons un maximum local, qu'en $x = 1$ nous avons un minimum local, qu'en $x = 3$ nous avons un maximum global et qu'en $x = 3,5$ nous avons un maximum global.

Pour détecter les extrema locaux nous avons la propriété suivante :

Propriété 12.47 *Si f possède un extremum relatif en $x = x_0$ alors soit $f'(x_0) = 0$ soit $f'(x_0)$ n'existe pas.*

Remark 12.9.1 *$f'(x) = 0$ ne suffit pas à garantir l'existence d'un extremum. La propriété suivante utilisant la dérivée seconde complète cette lacune. En effet, en étudiant la concavité ou la convexité de la fonction on peut déterminer si un point est un extremum local.*

Propriété 12.48 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Soit $]a, b[$ un intervalle contenant x_0.*
On suppose que $f'(x_0) = 0$ et que f'' existe sur $]a, b[\in I$ dans ce cas :

1. *si $f''(x_0) > 0$, alors $f(x_0)$ est un minimum local.*

2. *si $f''(x_0) < 0$, alors $f(x_0)$ est un maximum local.*

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876

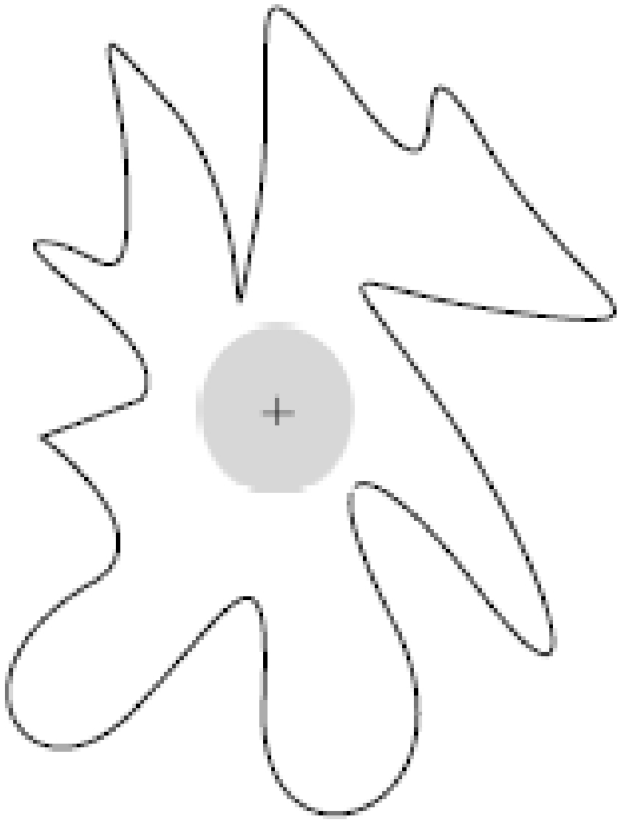
Exercice 12.49 *Montrer qu'en $x = 3$ la fonction $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ admet un maximum local.*

12.9.2 Extrémum local d'une fonction de plusieurs variables

Nous souhaitons étudier les extrema d'une fonction de plusieurs variables. Nous allons pour cela généraliser ce que nous savons faire 'a une une seule variable. Nous nous contenterons dans ce cours d'étudier les fonctions de deux variables.

Afin d'alléger les définitions de maximum et de minimum dans le cadre des fonctions de deux variables nous introduisons la notion suivante de voisinage :

Définition 12.50 *On appelle voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ toute partie du plan contenant un disque de centre (x_0, y_0) et de rayon strictement positif.*



Remark 12.9.2 *On peut remarquer qu'une partie du plan est un voisinage d'un point lorsque ce point se trouve à l'intérieur de cette partie. Autrement dit, un ensemble n'est pas un voisinage d'un point lorsque le point ne se trouve pas dans cet ensemble ou bien lorsque le point se situe sur le bord de l'ensemble considéré.*

Définition 12.51 *Soit f une fonction de deux variables x, y définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D$.*

1. *$f(x_0, y_0)$ est un* ***maximum global*** *de f si*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in D.$$

2. *$f(x_0, y_0)$ est un* ***maximum local*** *de f s'il existe un voisinage $V \subset D$ de (x_0, y_0) tel que :*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in V.$$

3. *$f(x_0, y_0)$ est un minimum global de f si :*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in D.$$

4. *$f(x_0, y_0)$ est un* ***minimum local*** *de f s'il existe un voisinage $V \subset D$ de (x_0, y_0) tel que :*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in V.$$

Point critiques

Pour détecter les extrema locaux nous avons la propriété suivante :

Si f possède un extremum relatif en (x_0, y_0) alors :

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

2. soit l'une des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ n'existe pas.

Un point (x_0, y_0) vérifiant l'une de ces conditions s'appelle un point critique.

Dr. Daniel SABI TAKOU /EPAC-UAC ©
sabitakoudaniel11@gmail.com/ 66464876